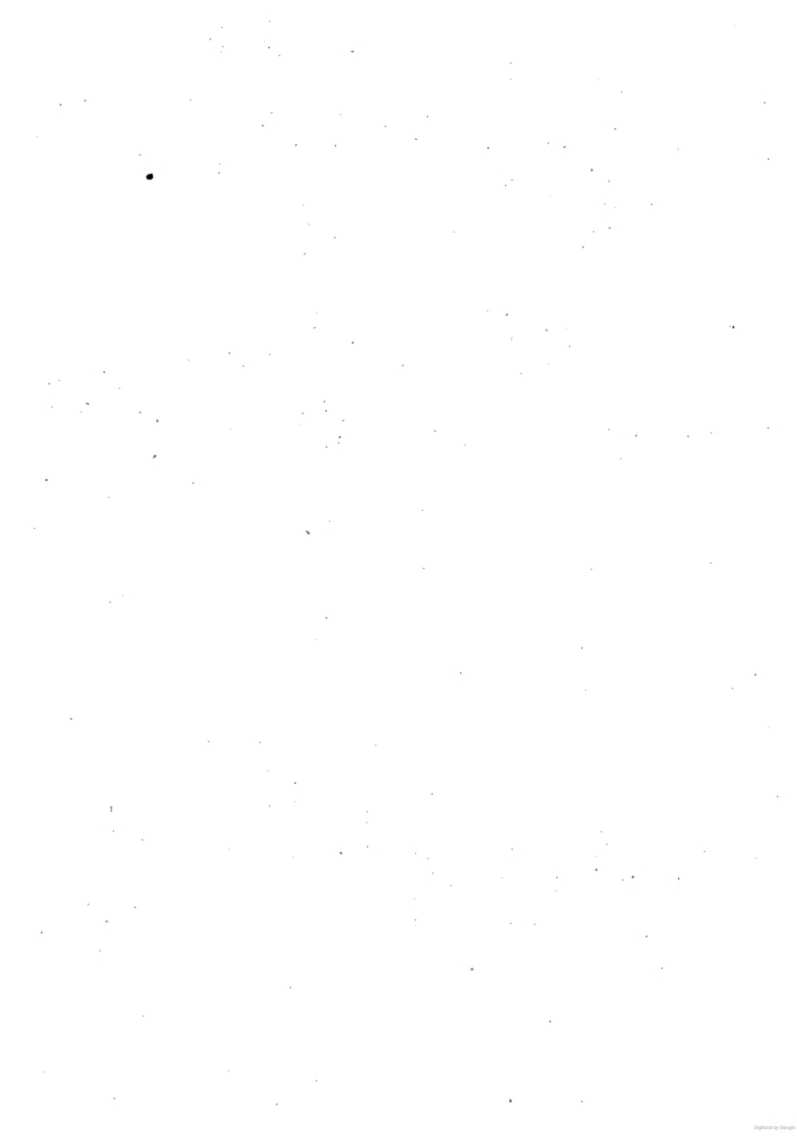




LEZIONI

DI

ALGEBRA ELEMENTARE

AD USO DELLA REGIA UNIVERSITA'
DEGLI STUDI DI CATANIA

DEL CAVALIERE

IGNAZIO DI NAPOLI

PUBBLICO PROFESSORE DELLA FACOLTA'
E SOCIO ATTIVO DELL'ACCADEMIA GIOENIA
DI SCIENZE NATURALI ec.



CATANIA

DA' TORCHI DELLA R. UNIVERSITA' DEGLI STUDI

PRESSO CARMELO PASTORE

1833

752-1-3-50

A S. A. R.

IL PRINCIPE
D. LEOPOLDO

CONTE DI SIRACUSA
LUOGOTENENTE GENERALE
IN SICILIA

Altezza Reale

Sagra cosa è l'istruzione della gioventù, e ogni uomo di senno conviene, che riguardar non deesi certamente come ultima fra le occupazioni gravissime di un saggio governante.

Su tal fidanza ardisco intitolare all'A. V.

quest'opera che a quel nobile scopo rimirà, e che
di una scienza si occupa tanto all' A. V. diletta.

Nella speranza che sarà per accettare
l' A. V. questo sincero tributo di mia devozione,
co' sensi del più profondo rispetto passo a segnarvi

Di V. A. R.

Umiliss. • Devotiss. • Obbligatiss. • Servo

IGNAZIO DI NAPOLI

P R E F A Z I O N E



Indossatomi l'obbligo d'istruire la gioventù aspirante all'Architettura non solamente, come prima, nella Geometria teorica pratica, e. Trigonometria, ma eziandio nell'Algebra elementare sino alle equazioni di terzo grado; sonomi veduto costretto di adattare il mio insegnamento a' prescrittimi limiti, ed al breve spazio di un anno scolastico.

È dunque il dovere di pubblico Professore; che mi obbliga a pubblicare le mie Lezioni di Algebra elementare dopo quelle già pubblicate di Geometria.

Infinito, dirà alcuno, è il numero delle opere elementari di algebra: ma appunto perchè tale mette l'istitutore nella necessità di scegliersi un filo, onde guidare la studiosa gioventù in sì intralciato laberinto di vari ed opposti metodi, e di adattare il suo insegnamento all'obbligo particolare cui è addetto, ed al tempo alle sue lezioni prescritto. Oltre a ciò, avendo ogni uomo una maniera particolare di sentire, e per conseguenza di vedere, e di esprimersi, riesce più facile al precettore il comunicare le proprie accozzate idee, e più proficuo alla discente gioventù istruendola con quel metodo, ch'egli ha creduto di dover prescegliere.

Ecco ciò che io ho preteso eseguire in queste mie lezioni per cui non sonomi dato carico dell'aritmetica, che come un caso particolare della teoria algebrica, applicandovi di tanto in tanto degli esempti numerici; essendo poi una legge nella nostra Università di dover esser gli allievi, prima di ammetterli, a giorno delle prime quattro aritmetiche operazioni.

Per una maggior facilitazione, e per sempre più esser diretti allo scopo cui dovranno tendere, ho divisi i miei elementi in cinque lezioni.

Nella prima generalmente classificando le quantità in intere, e frazionarie, ma sempre capaci di aumentare, o di menomare, esporrò le necessarie regole, sì per le prime, che per le ultime, della loro somma, sottrazione, moltiplica, e divisione algebrica.

Dal supporre poi una quantità il prodotto di più volte per se stessa ricaverò, nella seconda lezione, la teoria degli esponenti, la loro calcolazione, e le varie potenze di una complessa quantità, come altresì la di lei corrispondente radice, e per conseguenza il calcolo dei radicali. Facendo derivare le immaginarie da' radicali, di quelle una concisa teoria ne presenterò.

Nella terza lezione dalla eguaglianza tra loro di più quantità, parte cognite, e parte incognite, dedurrò l'idea di equazione, e dal numero delle incognite la necessità di esprimerle in altrettante equazioni, e perciò la

loro differenza in determinate, ed indeterminate equazioni. Indi dallo esponente della incognita caratterizzerò il grado delle equazioni, e la loro suddivisione in primo, e secondo grado, e passerò in fine alla loro risoluzione.

L' esame de' rapporti, che le quantità possono tra loro conservare, e quindi la teoria delle proporzioni, e quella in fin de' logaritmi, da una progressiva legge dedotta, formerà l' oggetto della quarta lezione.

Finalmente nella quinta ed ultima, dopo avere concisamente esposta la teoria generale delle equazioni di unò indeterminato grado, dopo aver fatto osservare la costante legge progressiva de' suoi costituenti termini, dopo averne da essa dedotto il tanto interessante metodo de' coefficienti indeterminati, ed applicatolo alla deduzione del binomio Newtoniano, passerò alla soluzione delle equazioni di terzo grado, ed allo sviluppo della formola cardanica limite al mio insegnamento assegnato.

Da quanto ho esposto vedesi, che in questi miei elementi ho procurato di seguire quel filo analitico, e quella successione d' idee, che deve caratterizzare qualsiasi opera elementare, e che può sola la gioventù costantemente guidare, per cui sonomi studiato di dimostrare col massimo rigore, e con chiarezza tutte quelle teorie, che formeranno il complesso delle mie lezioni;

persuasivo , che ciò , che distingue il matematico dal pratico calcolatore è il ben condotto ragionamento .

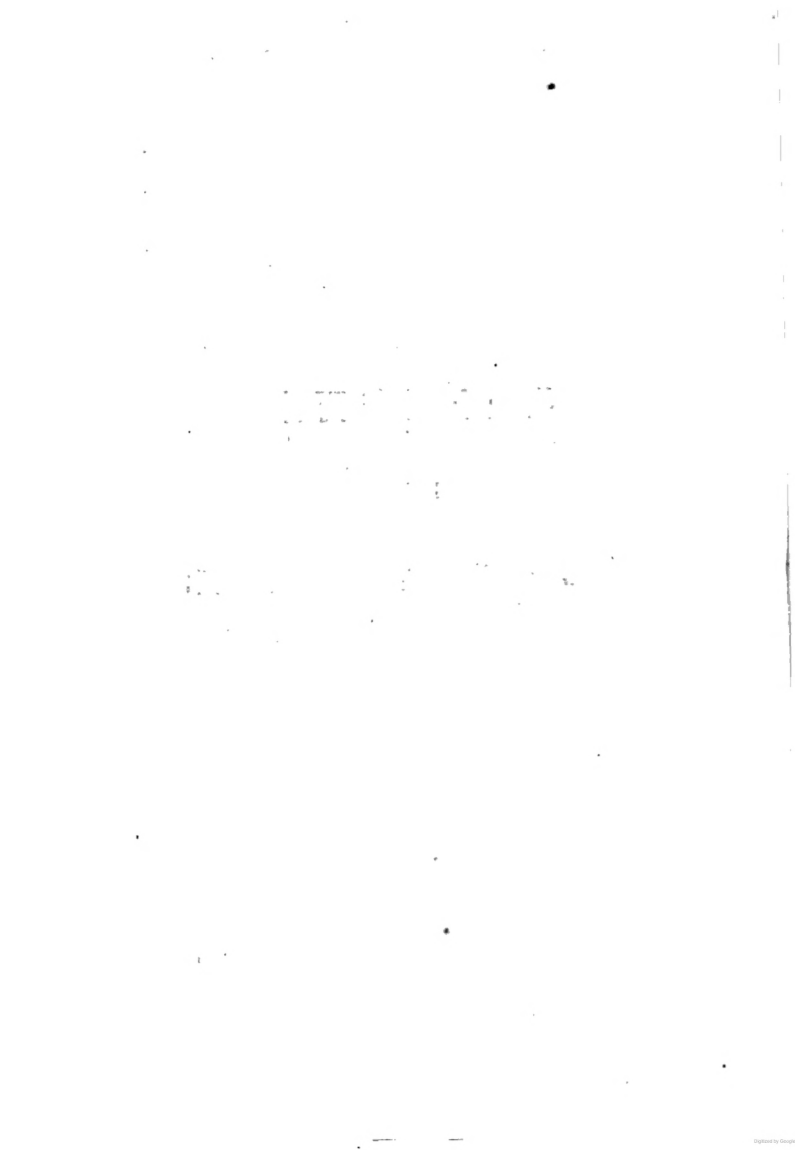
Nello stendere queste mie lezioni , mi è servita di guida l'opera del Paoli , giustamente encomiato dal sommo genio Lagrange . Ho procurato di mettere a portata de' giovani quelle teorie da sì insigne geometra sviluppate , e molte l'ho fedelmente trascritte .

Restami solo a manifestare , che con queste mie lezioni io non aspiro all'onore d'inventore , ma solamente a quello di rendermi utile a' miei discenti , onde le sagge e paterne mire del Benefico SOVRANO secondare ,

LEZIONI

DI

ALGEBRA ELEMENTARE



LEZIONE PRIMA

Operazioni preliminari dell'Algebra.

§ 1. L'oggetto delle Matematiche è il *calcolo delle quantità*, o sia di tutto ciò che è suscettibile di *aumento*, e di *diminuzione*.

Qualunque quantità può considerarsi, o come divisa in parti, o come continuata; nel primo caso essa dicesi *quantità discreta*, e *continua* nel secondo. L'esame delle quantità continue, riguardo alla loro estensione e configurazione, forma l'oggetto della *Geometria elementare*, e della *trascendente*; quello poi delle *discrete* costituisce l'indagine dell'*Aritmetica*, e dell'*Algebra*. Essendo dunque l'oggetto delle matematiche quello di calcolare, era dunque necessario fra tutte le quantità di una medesima specie e natura, una presceglierne a cui si riferiscono tutte le altre; or questa quantità appellasi *unità*.

Le quantità discrete poi possono avere valori particolari e determinati, o indeterminati e generali. Ciò costituisce la differenza tra l'*Aritmetica*, e l'*Algebra*. La prima non riguardando, che de' casi particolari impiegavi i *numeri*, che particolarmente li rappresentano; la seconda, considerando le quantità in generale, e non determinate, usa le lettere dell'alfabeto, potendo esse a voglia del calcolatore rappresentare qualunque quantità. Sotto questa semplice veduta

L'Algebra potrebbe considerarsi con Newton come un'Aritmetica universale: ma come saggiamente riflette Lagrange, dopo la di lei applicazione alla geometria trascendente, dopo le infinite risorse che prestaci, non può considerarsi come un'aritmetica universale, chè nelle sole quattro operazioni, ed in quelle, alle quali puossi arrivare coll'aritmetica.

§ 2. Esaminando ora di un modo generale le quantità, queste possono avere o una stessa, o una opposta maniera di esistere; come sarebbe, alcune tendenti ad *aumentare*, altre a *menomare*; si è convenuto contrassegnar le prime col nome di *positive*; e le seconde nominarle *negative*.

Per quantità negativa quindi s' intende quella che è opposta, e contraria alla positiva. Perciò se la quantità positiva c' indica un credito, la negativa c' indicherà un debito; e se quella il flusso di un punto da destra a sinistra, questa lo additerà da sinistra a destra. Trattandosi poi di quantità in generale, e potendosi queste o *addizionarsi*, o *sottrarsi* erano necessari de' segni, che generalmente esprimessero tali operazioni; tali sono $+$, e $-$, il primo dei quali serve all'addizione, leggesi *più*, e si antepone alle quantità che si aggiungono; ed il secondo serve alla sottrazione, leggesi *meno*, e si premette alle quantità che si sottraggono. Or considerando la quantità positiva tendente ad *aumentare*, e la negativa a *diminuire*, si è assegnato alla prima il segno $+$ additativo, ed alla seconda il segno $-$ sottrattivo,

Riguardando di più la quantità *positiva* come un *credito*, e la *negativa* come un *debito*, dedurrassene che non potrà la prima passare nella seconda senza pria toccare lo zero, che c'indica la non esistenza nè di credito, nè di debito.

Dunque lo zero è sempre un termine collocato tra le quantità positive e negative.

§ 5. Progredendo sempre colla stessa generalità, vedrassi facilmente, che una quantità può presentarsi sotto la forma di un tutto, o pure sotto una o più delle sue costituenti parti: così possiamo noi rappresentarci una intera quantità, o pure una o più parti di essa; nel primo caso avrassi una quantità *intera*, nel secondo una *frazione* del tutto considerato come unità. Or per conoscere il valore della frazione bisognerà sapere in quante parti è stato il tutto diviso, e di queste quante se ne considerano; dunque ogni frazione dee necessariamente contenere il numero delle parti in cui è stato il tutto diviso, ed il numero preso di queste parti. Or il primo appellasi *denominatore*, ed il secondo *numeratore*: il numeratore si mette al di sopra, ed il denominatore al di sotto: così in $\frac{b}{c}$ il denominatore *c* indica, che una quantità considerata come unità è stata divisa in *c* parti, ed il numeratore *b* il numero preso di queste parti.

Se il denominatore marcaci il numero in cui è stata divisa la quantità quanto desso sarà più grande, tanto più piccole saranno le parti; dunque in due frazioni, con differenti denominatori ed un comune numeratore, sarà quella

più grande, che avrà un più piccolo denominatore. Se il numeratore poi ci mostra il numero delle parti prese, quanto l'istesso sarà più grande, tanto maggiore sarà il numero di esse parti; perciò in due frazioni cogli stessi denominatori, e con differenti numeratori sarà quella maggiore, che avrà un più grande numeratore.

Dunque in generale una frazione aumenta a proporzione, che cresce il numeratore o diminuisce il denominatore, e diminuisce come cresce il denominatore o diminuisce il numeratore.

§ 4. Considerando generalmente due quantità, queste possono essere o eguali, o una maggiore dell'altra. Or la loro eguaglianza esprimeasi ponendo tra l'una, e l'altra il segno $=$, così $a = b$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, significa che a è eguale b , e la prima frazione eguale alla seconda. La disuguaglianza poi si esprime interponendo tra esse il segno $>$, in modo che la sua apertura riguardi la grandezza maggiore, e la punta la minore; così $a > b$, significa che a è maggiore di b , e b minore di a .

Una quantità poi può esistere o isolatamente, o unita a delle altre, o positive o negative che siano: nel primo caso appellasi *monomio* così $+b$, o $-b$; nel secondo caso se sarà unita ad una, o a due, o a tre, o a molte chiamerassi *binomio*, *trinomio*, o *polinomio*, e formeranno in generale una *complessa quantità*.

Ciascun monomio poi può esser composto da una o

da più lettere: or ciascuna di esse forma una dimensione; così ab sarà un monomio a due dimensioni, abc a tre, e così ec.

Così una quantità complessa non è che la riunione di più monomi; dunque trattando in generale il calcolo delle quantità complesse, saravvi implicitamente compreso quello delle quantità monomie. Consideriamo dunque le quantità in generale sotto una combinazione qualunque, e così tratteremo simultaneamente le operazioni sulle *complesse*, e sulle *monomie*.

§ 5. Le quantità per loro natura essendo soggette all'aumento ed alla diminuzione, avrà luogo dunque per esse la somma, la sottrazione, e per conseguenza la moltiplicazione e la divisione.

Della somma delle quantità algebriche intere.

Sommare delle quantità altro non significa, che riunirle, ed in siffatta riunione ciascuna conserverà la propria natura. Così dovendo sommare $a+b$ con $c+d$, dirassi $a+b+c+d$; ma se però dovressi riunire $a+b$ con $c-d$, in tale caso la loro somma ci sarà espressa per $a+b+c-d$. Difatti, volendo sommare $a+b$ con $c-d$, sommando $a+b$ con c solamente, si avrebbe una somma maggiore della vera, dappoichè da c bisogna sottrarvisi d , dunque per ridurla al suo vero valore, bisogna alla somma $a+b+c$ unirvi la negativa $-d$. Dunque nella somma le quan-

tità negative conservano il loro proprio segno. Perciò se ad a vorrassi unire la $-b$, avendosi $a-b$, ed essendo $a > a-b$ ne siegue: Che la somma tra una quantità positiva, ed una negativa, non ci dà un aumento, ma bensì una diminuzione.

Dovendo sommare le quantità positive $a+a+a+a+a$, si ripeterà cinque volte a , dunque avrassi $a+a+a+a+a=5a$; or il cinque, che esprime il numero delle volte, che l'istessa quantità a è ripetuta, appellasi *coefficiente*.

Il coefficiente quindi è l'indice della somma di una quantità per se stessa. Così na c'indica che a è sommata tante volte per se stessa, per quante unità si contengono nel coefficiente n .

Dunque ogni lettera ha per suo coefficiente l'unità, che suole sempre tralasciarsi.

§ 6. Abbiassi ora l'espressione

$$4a+9b-2c, \quad 2a-3c+4d, \quad 7b+c-e$$

delle quali se ne voglia la loro totale somma per il (§ prec.) avrassi $4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+c-e$. Ma i termini $4a$, e $+2a$ essendo formati di quantità simili e denotandoci il primo la quantità a ripetuta 4 volte, ed il secondo l'istessa ripetuta 2 volte, sarà questa nel tutto ripetuta sei volte, dunque $4a+2a=6a$. Per l'istessa ragione i termini $9b+7b$, daranno $16b$; i termini $-2c$, e $-3c$, ambedue nello stesso senso vi produrranno il medesimo effetto; ed in virtù del termine $+c$ in senso contrario resterà

solamente $-4c$. La somma dunque delle quantità proposte sarà ridotta a $6a+16b-4c+4d-e$. Tale operazione appellasi *riduzione*.

La riduzione dunque si effettua, facendo la somma delle quantità simili affette dal segno + con quella delle quantità simili affette dal segno -, poi togliendo la più piccola di queste due somme dalla più grande, e dando al resto il segno di questa.

È da osservarsi, come vedrassi, che la *riduzione* si applica a tutte le algebriche operazioni.

Data l'idea della *riduzione* altro non restaci, che presentare alcuni esempi per la somma delle quantità complesse, quale per farla più facilmente scriveransi le quantità da sommarsi una sotto l'altra, ponendo ciascun termine sotto il suo simile. Ecco degli esempi.

ESEMPIO 1.º

« Debbasi sommare la quantità complessa $5a+3b-4c$, con $2a-5b+6c+2d$. Esse disporransi nel modo seguente

$$\left. \begin{array}{r} 5a+3b-4c \\ 2a-5b+6c+2d \end{array} \right\} = 5a+2a+3b-5b-4c+6c+2d$$

e fatta la riduzione avrassi

$$5a+2a+3b-5b-4c+6c+2d=7a-2b+2c+2d.$$

ESEMPIO 2.º

« Vogliasi la somma de' tre polinomi

$$4a+5b-6c+8x, 6a-3b+6c-3x, 2a-2b+2c-5x$$

Disporransi nella maniera seguente

$$\left. \begin{array}{r} 4a + 5b - 6c + 8x \\ 6a - 5b + 6c - 3x \\ 2a - 2b + 2c - 5x \end{array} \right\} = (\text{fatta la riduzione})$$

$$12a \quad + 2c$$

Della sottrazione delle algebriche quantità intere.

§ 7. **S**ottrarre una quantità da un'altra, vuol dire scemmare la prima dalla seconda; e la *differenza* ci esprime il risultato di questa diminuzione. Così la *sottrazione* è l'operazione inversa della somma; ma la somma di due positive quantità (§ 5) ci dà un aumento; dunque la differenza di due positive quantità ci esprimerà una diminuzione; locchè otterrassi con cambiare alla quantità, che vuolsi sottrarre, il segno positivo in negativo.

Se però da una quantità positiva dovressi sottrarre una negativa, siccome (§ 5) la loro somma ci esprime una diminuzione, la loro sottrazione deve perciò esprimerci un aumento qualunque, che come dimostreremo non potrà ottenersi che con cambiare alla quantità che vuol sottrarsi il segno da negativo in positivo.

Difatti se vorrassi dalla quantità a sottrarvisi la $b - c$, sottraendo solamente b , si avrebbe $a - b$, ma essendo b diminuita di c la sottratta quantità sarà maggiore del vero suo valore, e per conseguenza la dedotta differenza minore; dunque per ottenerla qual realmente esser dee, bisognerà

aumentarla dalla quantità c , e perciò cambiare il meno in più, e sarà $a-b+c$ la cercata differenza.

Dunque la sottrazione delle quantità algebriche si effettua, scrivendo in seguito della quantità da cui se ne vuole sottrarre un'altra, quella da sottrarvisi cambiando i segni, ed indi farassene la riduzione.

Ecco degli esempi.

ESEMPIO 1.º

« Dalla quantità $3a+6c-3x$ sottrarre $2a-2c-4x$, avrassi $3a+6c-3x-2a+2c+4x$, e fatta la riduzione si avrà $a+8c+x$. »

ESEMPIO 2.º

« Dalla quantità $5a+5c-4x+q$, si debbono insieme sottrarre $3a-4c-5x-2q$, ed $a-2c-6x+q$: fatta la riduzione avrassi la differenza $= a+9c+7x+2q$. »

Della moltiplicazione delle quantità algebriche intere.

§ 8. **M**oltiplicare i due monomi a , b , altro non significa, che sommare a tante volte per se stessa, per quante unità si contengono in b ; ed egualmente moltiplicare tra loro i tre monomi a , b , c , vuol dire prendere a un numero b di volte, e questo risultato ripeterlo per quante unità si contengono in c .

Or le quantità su delle quali fassi l'operazione appellansi *fattori*, ed il loro risultato *prodotto*; da tutto ciò si ricava, che ogni fattore puossi considerare qual coeffi-

ciente dell' altro, e per conseguenza (§ 5) dovrà precedere, come tale, la quantità che moltiplica; così dunque volendo moltiplicare b per a , scriverassi ab ; la prima di queste quantità dicesi *moltiplicatore*, la seconda *moltiplicando*.

Si effettua dunque la moltiplica tra più fattori scrivendoli consecutivamente, e senza alcuno intermedio segno. Dalla premessa idea della moltiplicazione deducesi: *Che qualunque sia l'ordine dei fattori il loro prodotto sarà sempre l'istesso.* Così $abc = bac = cba$, si accenna la moltiplicazione con mettere in mezzo di essi fattori il segno $\times$ o un punto; così $a \times b = ab$, $a \times b \times c = abc$, $a.b = ab$; se a è sommato tre volte con se stesso, e b quattro volte, e perciò sarà il primo $3a$, ed il secondo $4b$, in tal caso oltre l'unione delle lettere bisogna moltiplicare tra loro i due numerici fattori 3 e 4.

Dunque nella moltiplicazione algebrica i coefficienti tra loro si moltiplicano.

Se come si viene di accennare nella moltiplicazione avrassi $a \times b = ab$, $a \times b \times c = abc$, dunque per la ragione istessa sarà $a \times a = aa$, $a \times a \times a = aaa$, e così ec.

Or sarebbe un grande incommodo il ripetere le medesime lettere, ed a tal' uopo sonosi sostituiti gli *esponenti*; i quali indicano il numero delle volte, che una quantità è moltiplicata per se stessa; così $a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$.

Gli esponenti perciò indicano il numero de' fattori eguali.

Non bisogna dunque confondere il coefficiente coll' esponente; difatti l'espressione na significa che a è stata presa n volte, ed a^n ci marca, che è stata con se stessa moltiplicata n volte. Or siccome ogni quantità può sempre considerarsi come unico fattore, così ad ogni lettera egualmente, che per il coefficiente, vi si suppone sempre l'unità per esponente; così $a = a^1$, quale come nel coefficiente si traslascia. Poichè l'esponente c' indica in un prodotto il numero de' fattori eguali, ne siegue che a^5 , in cui a è cinque volte fattore, moltiplicato per a^3 , in cui a lo è tre volte, dovrà darci un prodotto nel quale a sia 8 volte fattore, e per conseguenza espresso per $a^8 = a^{5+3}$, ed in generale $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Dunque nella moltiplicazione gli esponenti delle stesse lettere dovranno tra loro sommarsi.

Ci resta in fine a ragionare su i segni. Or due fattori possono avere o l'istesso, o differente segno. L'istesso poi può essere o positivo o negativo; bisogna dunque esaminare il risultato in tutti questi casi.

Nella circostanza di due fattori positivi, sarà chiaro che il loro prodotto sarà positivo, e sarà così $+a \times b = ab$. Cercasi dunque il prodotto di $-a$ per $+b$. A tale uopo riflettasi che se da a scemerassi l'istessa quantità a , avrassi un risultato eguale a zero; dunque $a - a = 0$. Or moltiplicando questa espressione per b , il resultante prodotto esser deve zero, dappoichè lo zero ripetuto quante volte si

vuole, dà sempre zero, e moltiplicando parzialmente $a - a$, per b la prima moltiplicazione ci darà $+ab$, e la seconda cioè $a \times -b$ ci dovrà dare un prodotto tale, che unito all' antecedente $+ab$, abbiassi zero per risultato. Ma per ciò accadere è necessario che $-a \times +b$, ci dia $-ab$.

Dunque nella moltiplicazione due quantità positive ci daranno un prodotto positivo, una positiva e l'altra negativa ci daranno un prodotto negativo.

Vogliasi ora il prodotto tra $-a$ e $-b$, allora facendo l'istesso ragionamento, avrassi $a - a = 0$; dunque moltiplicando per $-b$, come sopra, si avrà $-b \times a = -ab$, perciò $-b \times -a$ deve darci un prodotto che unito a $-ab$ sia eguale a zero, perciò esser deve $-a \times -b = ab$.

Dunque due quantità collo stesso segno formeranno un prodotto positivo, con segni contrarii uno negativo.

Nella moltiplicazione dunque i coefficienti si moltiplicano tra loro, gli esponenti delle stesse lettere si sommano, ed in fine se i fattori avranno lo stesso segno il prodotto sarà positivo, negativo se avranno segni contrarii.

Vogliasi ora il prodotto tra i due binomi $a+b$, e $c+d$; siccome ciascun fattore è una complessa quantità, così per accennare le loro moltipliche racchiuderassi ciascuno in una parentesi, così scriverassi $(a+b)(c+d)$. Or se si dovesse moltiplicare $a+b$ per c , si avrebbe $(a+b)c$; ma il fattore $c+d$ essendo maggiore di c della quantità d , il

prodotto cercato dovrà essere d volte maggiore, sarà perciò questo $(a+b)c + (a+b)d$.

Or se si dovesse moltiplicare c per a , il prodotto sarebbe ac , ma il fattore $a+b$, essendo maggiore di a della quantità b , il vero prodotto di $(a+b)c$ dovrà esser b volte maggiore, sarà perciò $(a+b)c = ac + bc$, del pari troverassi $(a+b)d = ad + bd$, e quindi il prodotto di

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

Ne segue dunque, che per aversi il prodotto delle quantità complesse dovranno moltiplicarsi tutti i termini di un fattore per ciascun termine dell' altro, e sommarsi i particolari prodotti.

Non restaci dunque che applicare queste regole ad alcuni esempi. Ma pria bisogna avvertire che avendo noi accennato nel (§ 6) che la *riduzione* segue sempre qualunque algebrica operazione, e che l' istessa ha luogo tra i *termini simili*; ma i differenti esponenti facendo cambiare di valore una lettera istessa, ne segue, che la riduzione dovrà farsi sulle *stesse lettere cogli stessi esponenti*.

ESEMPIO 1.^o

« Vogliansi moltiplicare tra loro i due fattori $2a+5b-3c$, ed $a-3b+2c$: ecco il calcolo.

$$2a + 5b - 3c$$

$$\underline{a - 3b + 2c}$$

$$2a^2 + 5ab - 3ac$$

$$-6ab$$

$$-15b^2 + 9bc$$

$$+4ac$$

$$+10bc - 6c^2$$

E fatta la riduzione avrassi

$$(2a+5b-3c)(a-3b+2c)=2a^2-ab+ac-15b^2+19bc-6c^2$$

ESEMPIO 2.^o

« Vogliasi il prodotto de' due fattori

$$(2a+3b+4x)(3a-2b-6x)$$

Fatti i calcoli, ed effettuata la riduzione, avrassi

$$(2a+3b+4x)(3a-2b-6x)=6a^2+5ab-6b^2-26bx-24x^2$$

Della divisione delle algebriche quantità intere.

§ 9. **L**a divisione è l'operazione inversa della moltiplica; or se in quella ripetesi una quantità tante volte per quante unità si contengono nel *fattore*, ed indi il *prodotto* che ne risulta verrà a dividersi per il detto *fattore*, che chiamasi *divisore*, il *quoziente* che ne risulta sarà poi la quantità primitiva. Quindi *dividere* è lo stesso, che togliere al *dividendo* un *fattore* comune al divisore.

Dunque se unico sarà il *fattore* comune questo dovrà annullarsi.

Perciò nella divisione le lettere simili si cancellano. Così moltiplicando ab per b si ha (§ prec.) $ab \times b = ab^2$, volendolo dividere per lo stesso b significa fare dal prodotto svanire un fattore b , dunque quest'ultimo non sarà più moltiplicato per se stesso, e perciò nel primo prodotto avrassi solamente ab ; or $ab = ab^{2-1} = ab$: cioè si divide ab^2 per b sottraendo gli esponenti di b comune fattore. Ma più generalmente moltiplicando ab^m

per b^n avrassi (§ prec.) ab^{m+n} ; or dividendolo per lo stesso b^n significa far dal prodotto svanire un numero n di fattori eguali; dunque nel prodotto ab^{m+n} dalla somma $m+n$ di fattori b dovrà sottrarvisi n fattore b , ossia l'esponente del divisore b^n .

Perciò nella divisione gli esponenti delle stesse lettere si sottraggono.

Per determinare la natura dei segni fa d'uopo osservarsi, che nella divisione il dividendo è eguale al prodotto del quoziente pel divisore; dappoichè esprimendoci il quoziente il numero delle volte che il divisore è contenuto nel dividendo, preso il quoziente tante volte per quante unità si conterranno nel divisore, ci riprodurrà il dividendo. Se dunque vorrassi dividere la quantità positiva ab per b avrassi $\frac{ab}{b} = a$; dunque il quoziente a moltiplicato per il divisore $+b$ dovendo darci il positivo dividendo ab , ne segue (§ prec.) che esso quoziente esser dee *positivo*.

Sia ora da dividersi la quantità negativa $-ab$ per la positiva $+b$, avrassi $\frac{-ab}{b} = -a$; dappoichè si è il quoziente negativo $-a$, che moltiplicato per il divisore positivo b potrà darci (§ prec.) il dividendo negativo $-ab$; e per conseguenza esser dee il quoziente *a negativo*.

Alla fine sia da dividersi la quantità negativa $-ab$ per la negativa $-b$ avrassi $\frac{-ab}{-b} = a$, dappoichè il quoziente a per il divisore $-b$ dovendo produrre il dividendo nega-

tivo — ab (§ prec.) esser dee il quoziente a positivo. Dunque dedurrassene:

Che riguardo a' segni avrà luogo nella divisione l'istessa legge, che regola la moltiplica. Ed in generale:

Nella divisione i coefficienti si dividono tra loro; gli esponenti delle stesse lettere si sottraggono, ed in fine se il dividendo ed il divisore avranno lo stesso segno, il quoziente sarà positivo, negativo se avranno segni contrari.

Sia la quantità A da dividersi per l'altra B , sia $A=abc$, $B=lmn$; ed abbiasi inoltre $\frac{a}{l}=p$, $\frac{b}{m}=q$, $\frac{c}{n}=r$, allora dovendo il prodotto del divisore pel quoziente eguagliare il dividendo, avrassi $a=pl$, $b=mq$, $c=nr$; dunque si avrà $A=(abc)=lpmqnr$, e per (§ 8.) $A=lmnpqr=B \times pqr$; ma se due quantità eguali divideransi per una stessa quantità, i quozienti risulteranno eguali, perciò $\frac{A}{B} = \frac{B \times pqr}{B} = pqr$.

Dunque se il dividendo, ed il divisore saranno scomponibili in fattori, il quoziente eguaglierà il prodotto de' quoti, che risulteranno col dividere ciascun fattore del dividendo per quello corrispondente del divisore.

Per farne un'applicazione numerica sia $A=32$, $B=8$, sarà $\frac{A}{B} = \frac{32}{8} = 4$. Ma $32=2 \times 4 \times 4$, $8=2 \times 1 \times 4$; dunque sarà $p = \frac{2}{2} = 1$, $q = \frac{4}{1} = 4$, $r = \frac{4}{4} = 1$, e perciò $pqr=1 \times 1 \times 4=4$, dunque $\frac{A}{B} = \frac{32}{8} = 1 \times 1 \times 4 = pqr$.

Or quel numero intero il quale non sarà divisibile esat-

tamente per un' altro intero, eccetto dell'unità, dicesi *numero primo* o semplice, in caso diverso denominasi *composto*, e tale è il 10 essendo divisibile per 2, o per 5; due o più numeri paragonati tra loro, se non hanno un divisore esatto comune fuorchè l'unità, chiamansi *primi tra loro*, come il 15 ed il 16. Il fattore poi più grande comune a due, o a più numeri interi, dicesi il loro *massimo comune divisore*.

Dal premesso dunque deducesi qual differenza passa tra i numeri *assolutamente primi*, e quei *relativamente primi*. E ricavasi egualmente, che i numeri *assolutamente* primi lo saranno sempre *relativamente*; ma non viceversa, che due primi tra di loro saranno sempre *primi assolutamente*.

Se per natura della divisione il prodotto del divisore per il quoziente dar ci deve il dividendo, ne segue, che se proporrassi di dividere il trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ per il binomio $a + b$, la questione si ridurrà a trovare una quantità, che moltiplicata per il divisore $a + b$ ci dia il dividendo $a^2 + 2ab + b^2$. Or dividendo il monomio a^2 per a , il quoziente a che ne risulta moltiplicato per il divisore $a + b$ e sottratto dal dividendo, facendoci da quest'ultimo svanire alcune quantità, che nel nostro caso sarebbero $a^2 + ab$, e rimanere $ab + b^2$, questo ci mostra, che a sola non è il *quoziente cercato*, e quindi dovrà assoggettarsi il residuo trovato alla medesima operazione; dividendo perciò $ab + b^2$ per a avrassi per quoziente b ,

e siccome quest' ultimo è tale, che moltiplicato per il divisore $a+b$, ed indi sottratto da $ab+b^2$ ci dà per differenza zero, conchiuderassi che il quoziente di $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$ sarà $a+b$, vale a dire, che la quantità cercata tale che moltiplicata per il divisore ci dia il dividendo, nel nostro caso sarà $a+b$.

Se non verificherassi questo annullamento, allora si avrà un *residuo*, ed il dividendo non sarà perfettamente divisibile per il dato divisore, dappoichè il quoziente moltiplicato pel divisore non eguaglierà il dividendo.

Per minor fatica poi si ordineranno i termini in modo, che il primo abbia una lettera comune al dividendo, ed al divisore col massimo esponente, il secondo la lettera istessa coll' esponente prossimamente minore, e così ec. perciò le due quantità $a^4+4a^3b+ba^2b^2+4ab^3+b^4$, ed il divisore $a^2+2ab+b^2$, saranno ordinati per la lettera a .

Data la maniera di effettuare la divisione tra le quantità algebriche complesse, non restaci che presentare alcuni esempi.

ESEMPIO I.º

» Vogliasi dividere a^2-b^2 per $a+b$

dunque	divis.	divid.
	$\frac{a+b}{\quad}$	$\frac{a^2 - b^2}{\quad}$
quoz. = $a-b$		$\frac{-a^2 - ab}{\quad}$
		$\frac{-ab - b^2}{\quad}$
		$\frac{+ab + b^2}{\quad}$
		$\frac{0 \quad 0}{\quad}$

dunque $\frac{a^2 - b^2}{a+b} = a-b$; in effetto $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ESEMPIO 2°

« Vogliasi il quoziente di $\frac{10ab + 14ac + 4a^2 + 17bc + 6b^2 + 12c^2}{3b + 2a + 4c}$

primieramente ordinerassi per a , e si avrà

	divis.	divid.
	$\frac{2a + 3b + 4c}{\quad}$	$4a^2 + 10ab + 14ac + 17bc + 6b^2 + 12c^2$
quoz. = $2a + 2b + 3c$		$\frac{-4a^2 - 6ab - 8ac}{\quad}$
		$4ab + 6ac + 17bc + 6b^2 + 12c^2$
		$\frac{-4ab - 8bc - 6b^2}{\quad}$
		$6ac + 9bc + 12c^2$
		$\frac{-6ac - 9bc - 12c^2}{\quad}$
		$\frac{0 \quad 0 \quad 0}{\quad}$

dunque il cercato quoziente sarà $2a + 2b + 3c$; in effetto

$(2a + 2b + 3c)(2a + 3b + 4c) = 4a^2 + 10ab + 14ac + 17bc + 6b^2 + 12c^2$



Delle operazioni preliminari sulle frazioni.

§ 10. Se come si è detto (§ 5) le *frazioni* non sono, che costituenti parti d' una unità, la loro somma non ci esprimerà, che la riunione di codeste parti, e la sottrazione la loro *differenza*. Dunque le quantità frazionarie da sommarsi, o da sottrarsi devono essere parti di un medesimo tutto, vale a dire in esse l'unità esser dee divisa in uno egual numero di parti e per conseguenza (§ 5) affette dallo *stesso denominatore*. Trattandosi perciò di sommare, o di sottrarre delle frazioni, fa d' uopo pria dar la maniera di ridurre allo *stesso denominatore*: per ciò eseguire rifletterassi, che moltiplicando il numeratore a della frazione $\frac{a}{b}$ per n significa ripetere n volte a , e perciò la frazione diverrà n volte maggiore, ma nel tempo istesso per la moltiplica, che farassi del denominatore b per lo stesso n , diverrà n volte minore, dunque rimarrà nel suo primiero stato.

Lo stesso ragionamento avrà luogo se dividerassi per la medesima quantità sì il numeratore, che il denominatore della frazione, dunque:

Una frazione non si altera moltiplicando, o dividendo per l' istessa quantità il di lei denominatore, e numeratore.

Ciò posto vogliansi ridurre allo stesso denominatore le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Se moltiplicherassi sì il numeratore della

prima, che il suo denominatore per il denominatore della seconda, la frazione non si altererà, ed avrassi $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$.

Se poi si moltiplicherà sì il numeratore, che il denominatore della seconda frazione per il denominatore della prima avrassi $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$; dunque senza alterare il valore delle

frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ sonosi trasformate in $\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$, vale a dire, che l'unità in tutte e due le frazioni è stata divisa in un egual numero di parti, espresso dal loro comune denominatore bd , cosa che ricercavasi per la somma, e sottrazione.

Ciò che ha luogo per due frazioni lo avrà eziandio per tre, per quattro, per un numero n di frazioni.

Dunque in generale si riducono i rotoli allo stesso denominatore con moltiplicare i termini di ciascuna frazione per il prodotto de' denominatori di tutte le altre.

Così dunque le frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ si ridurranno ad $\frac{adnq}{bdnq}, \frac{bcnq}{bdnq}, \frac{bdmq}{bdnq}, \frac{bdnp}{bdnq}$.

Per la ragione istessa se vorrassi ridurre un intero sotto la forma di un fratto, altro far non deesi, che dopo aver moltiplicato l'intero per il denominatore da assegnarvisi, dare a codesto prodotto l'assegnato denominatore; così volendo ridurre a ad una frazione apparente col denominatore b farassi $\frac{ab}{b} = a$.

§ 11. Se (§.prec.) una frazione non cangia di valore dividendo sì il numeratore, che il denominatore di essa per lo stesso divisore, ne segue che un rotto può presentarsi sotto varie forme, conservando sempre l'istesso valore. Su questa semplice idea poggia l'operazione di ridurre un fratto alla *minima espressione*. Tra le varie forme, che può avere un fratto, saravvene una minore di tutte. Or per ritrovarla bisogna rinvenire un divisore comune al numeratore, ed al denominatore, che ci dia un minimo quoziente per ciascuno di essi; ma il quoziente, supposto l'istesso dividendo, diminuisce come aumenta il divisore, dunque per ottenere la *minima espressione* di un fratto, ossia il minimo quoziente del numeratore, e denominatore bisogna pria ricercare il *massimo comun divisore*. A tal' uopo si osservi primieramente, che allora una frazione $\frac{a}{b}$ sarà ridotta alla minima espressione tutte le volte che sì il numeratore a , che il denominatore b saranno *primi tra loro*. Difatti sia $a=ph$, $b=pk$, supposto $p>1$, avrassi $\frac{a}{b} = \frac{ph}{pk} = \frac{h}{k}$, e per conseguenza la frazione $\frac{a}{b}$ a cagione di $h<a$, e di $k<b$, non sarebbe più ridotta alla più *semplice espressione*. Ciò posto sieno le due quantità A, B delle quali vogliasi il massimo comune divisore, sia $A>B$, dividendo A per B , se sarà B un divisore esatto di A , sarà in tal caso B il cercato massimo comune divisore, e la frazione sarà apparente.

Or non suppostala tale sia q il quoziente, ed R il residuo, allora avrassi $\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B}$, ossia $A = Bq + R$, e togliendo dall' una, e dall' altra di queste quantità eguali Bq , avrassi $A - Bq = R$, in cui sarà $R < B$, ed intero per esser eguale alla differenza di due interi; dunque potrassi dividere B per R , e non supposto R un divisore esatto di B , sia q' il quoziente, ed R' il residuo, avrassi $B = Rq' + R'$; e per la ragione or detta $B - Rq' = R'$; perciò sarà $R' < R$, ed intero; dunque potrassi dividere R per R' , e non supposto R' un divisore esatto di R , sia q'' il quoziente, ed R'' il residuo; avrassi $R = R'q'' + R''$, e perciò $R - R'q'' = R''$. Or non esistendo residuo alcuno per ipotesi, ed essendo $R'' = 0$, sarà R' il comune divisore tra A , e B ; esistendo poi R'' ed essendo per quanto si è detto un numero intero minore di R' , farassi il medesimo ragionamento con dividere R' per R'' , e non esistendo residuo alcuno R''' , sarà R'' il comune cercato divisore. Dappoichè essendo i successivi residui R , R' , R'' cc. tanti interi positivi di valore finito, i quali vanno continuamente decrescendo, col proseguire l' operazione arriverassi in fine ad uno di quei residui il quale sarà zero. Or supposto che tale sia quello che risulta dividendo R' per R'' , risultando esatta quest' ultima divisione avrassi $R' = q''' R''$, dunque sarà R'' un divisore esatto di se medesimo e di R' , dunque lo sarà di $R'q''$, (dappoichè se una quantità ne divide esattamente un' altra, deve pure dividere esattamente qualunque pro-

dotto in cui entra come fattore) e perciò lo sarà di $q''R' + R''$. Ma $R = R'q'' + R''$, dunque lo sarà di R , ma $B = Rq' + R'$, dunque lo sarà di B , ma $A = Bq + R$, dunque lo sarà di A egualmente, per esserlo di B , e di R ; dunque sarà R'' il divisore delle date quantità A , B ; sarà poi il massimo doppoichè non essendolo, e supposto K il massimo, e perciò $K > R''$, in tal caso sarà divisibile per K la differenza $A - Bq$, e perciò R ; ed essendo $B - q'R = R'$, lo sarà pure divisibile R' ; finalmente essendo $R - R'q'' = R''$ dovrà esserlo pure R'' ; lo che è impossibile essendo per ipotesi $R'' < K$.

Finalmente se le quantità A , B non avranno alcun fattore comune, e perciò *divisore*, l'ultimo sarà l'unità, giacchè come si sa qualunque quantità divisa per l'unità rimane la stessa.

Dunque riducesi un rotto alla più semplice espressione, col dividere i termini per il loro massimo comune divisore. Quale per ottenerlo dividesi il maggior termine per il minore, e se nulla avanza il minore è il divisore cercato; se vi è un resto si divide per esso il minor termine, e se nulla avanza il resto è il divisore cercato. Con un nuovo resto ripetesi la divisione e proseguirassi finchè avrassi zero, il resto che precede zero sarà il massimo comune divisore, perciò se l'ultimo resto è 1 il rotto sarà irriducibile.

Presentiamone un' applicazione.

Sia, nella frazione $\frac{B}{A}$, $B=64$, $A=360$; dividendo 360

per 64 avrassi un quoziente $q=5$, ed un primo residuo $R=40$; dividendo B per R , ossia 64 per 40, otterrassi un quoziente $q'=1$, ed un residuo $R'=24$, indi dividendo il primo residuo R per il secondo R' , ossia 40 per 24 avrassi un quoziente $q''=1$, ed un residuo $R''=16$; dividendo il penultimo residuo R' per l'ultimo R'' , ossia 24 per 16, otterrassi il quoziente $q'''=1$ ed un residuo $R'''=8$; alla fine dividendo il residuo R'' per l'ultimo R''' , ossia 16 per 8, avrassi un quoziente $q''''=2$, e per residuo zero; dunque sarà 8 il *massimo comune divisore cercato*, e perciò dividendo per 8 sì il numeratore, che il denominatore della frazione $\frac{64}{560}$, avrassi $\frac{B}{A} = \frac{64}{560} = \frac{8}{45}$. Ecco il quadro del calcolo.

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 360 \\ 520 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 1 \\ 64 \\ 40 \\ \hline 24 \\ 40 \\ 24 \\ \hline 16 \\ 24 \\ 16 \\ 8 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

Somma, e sottrazione delle quantità frazionarie.

§ 12. Se sommare delle frazioni altro non significa, che riunire le parti nelle quali è stato *egualmente* diviso un tutto, e se l'eguaglianza delle parti ci vien marcata dal

comune denominatore, ne segue, che la somma delle frazioni otterrassi dalla riunione de' numeratori, dopo la riduzione al medesimo denominatore. Inoltre per l'istesse ragioni addotte per la somma delle quantità intere, ne segue che nella somma delle frazioni, egualmente che in quella delle intere, deesi a ciascuno numeratore assegnare il proprio segno.

Dunque per sommare delle frazioni bisogna pria ridurle allo stesso denominatore, riunire i numeratori con i loro proprî segni, e farsene indi la riduzione.

Così dovendo sommare le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ridurransi pria allo stesso denominatore (§ 10.) ed avrassi $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, e sommandoli otterrassi $\frac{ad+cb}{bd}$. E dovendo sommare le frazioni $\frac{a}{b}$, e $\frac{-c}{d}$, avrassi $\frac{ad-bc}{bd}$. Per la stessa ragione la sottrazione delle quantità frazionarie, farassi con sottrarre tra loro i numeratori, dopo averle ridotte allo stesso denominatore; e per quanto si è veduto bisognerà alle quantità da sottrarsi cambiare il segno. Così dovendo sottrarre dalla frazione $\frac{a}{b}$ la quantità frazionaria $\frac{c}{d}$, farassi $\frac{ad-bc}{bd}$; e volendo sottrarre dalla frazione $\frac{a}{b}$, $\frac{-c}{d}$ avrassi $\frac{ad+bc}{bd}$: darem fine a codesta teoria con due applicazioni numeriche.

ESEMPIO 1.^o

« Vogliasi la somma delle frazioni $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{-2}{4}$,
riducendole allo stesso denominatore trasformeransi in

$$\frac{768}{960}, \frac{800}{960}, \frac{360}{960}, \frac{-480}{960}$$

e sommandole avrassi

$$\frac{768+800+360-480}{960} = \frac{1448}{960} . »$$

ESEMPIO 2.^o

« Vogliasi la differenza tra le due frazioni $\frac{8}{9}$, e $\frac{4}{5}$,
riducendole al medesimo denominatore avrassi $\frac{40}{45}$, $\frac{36}{45}$,
dunque sottraendo otterassi $\frac{40-36}{45} = \frac{4}{45} . »$

Moltiplicazione delle frazioni.

§ 13. **M**oltiplicare una *frazione* per un numero *intero* significa ripeterla tante volte per quante unità contengono nel moltiplicatore, e per conseguenza dovrassi sommare il numeratore per quante unità si contengono nel moltiplicatore .

Dunque per ottenere il prodotto di una frazione per uno intero, bisognerà moltiplicare il numeratore della frazione per l'intero .

Così $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; ma se però vorrassi il prodotto di

due frazioni, come sarebbe quello di $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$; se moltiplicherassi $\frac{a}{b}$ per l'intero c si avrebbe $\frac{ac}{b}$; ma essendo il fattore $\frac{c}{d}$, d volte minore del supposto fattore c , il trovato prodotto sarà maggiore d volte, dunque bisognerà diminuirlo con ripetere il denominatore b , d volte, e perciò sarà $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Si moltiplicheranno dunque i rotti con scrivere sotto il prodotto dei numeratori quello dei loro corrispondenti denominatori.

Così sarà $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$, $\frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2}$, ed $\frac{a}{c} \times \frac{-b}{m} = -\frac{ab}{cm}$.

Sia ora $a=5$, $b=6$, $m=2$, $n=4$, allora avrassi

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{5 \times 2}{6 \times 4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Divisione delle frazioni.

§ 14. **D**ividere una *frazione* per uno *intero* corrisponde a diminuirla tante volte per se stessa per quante unità si contengono nel divisore, e perciò a moltiplicare per tutte queste unità il di lei denominatore.

Per ottenere dunque il quoziente di una frazione per uno intero bisognerà moltiplicare il denominatore della frazione per l'intero.

Così $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. Se però vorrassi il quoziente di due frazioni allora un ragionamento analogo al (§ prec.) ce ne additerà il mezzo. A tale uopo riflettasi che nella divisione il quoziente aumenta o diminuisce, quanto è più piccolo o più grande il divisore. Ciò posto vogliasi il quoziente di $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$. Or se dovesse dividersi $\frac{a}{b}$ per l'intero c , per quanto si è detto, chiamando q il quoziente avrebbesi $q = \frac{a}{bc}$. Ma essendo il divisore $\frac{c}{d}$ minore di c tante volte per quante unità contengono in d , deducesene, che il quoziente q sarà di tante volte minore di quello, che risulta da $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, cioè di quante unità si contengono nel denominatore d , dunque per avere il vero quoziente di $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, bisognerà moltiplicare q per d , e perciò avrassi $q \times d = \frac{ad}{bc} = \text{quoziente di } \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Dunque si divideranno i rotti con moltiplicare il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore, ed il denominatore del dividendo pel numeratore del divisore.

$$\text{Così } \frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}, \quad \frac{a}{c} : \frac{a}{c} = \frac{ac}{ac} = 1, \quad \text{ed } \frac{a}{c} : \frac{-b}{m} = \frac{-am}{bc}.$$

Sia ora $a=5$, $b=8$, $m=2$, $n=4$, sarà

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{5}{8} : \frac{2}{4} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Finalmente se vorrassi il quoziente di

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{d}{n}\right)$$

si avrebbe riducendo allo stesso denominatore

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{d}{n}\right) = \frac{acn + bn}{mnc + dc}$$

Or fatto $a=3$, $b=2$, $c=9$, $m=7$, $d=1$, $n=3$, eseguite le sostituzioni, e fatti i calcoli avrassi

$$\left(3 + \frac{2}{9}\right) : \left(7 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3 \times 9 \times 3 + 2 \times 3}{9 \times 7 \times 3 + 1 \times 9} = \frac{87}{198}$$

Delle frazioni decimali.

§ 15. Per *frazione decimale* intendosi quel *fratto*, che ha per suo denominatore l'unità seguita da uno o più zeri; la teoria dunque delle frazioni decimali non è che un caso particolare di quella de' rotti ordinari.

Per semplificare le operazioni, si è data intanto alle frazioni una forma intera, loro apparentemente togliendo il denominatore; ed il sistema ordinario di numerazione ne ha presentato il mezzo. Come si sa dalle prime regole di esso sistema, ogni cifra andando gradatamente da destra a sinistra, va ad ogni grado *decuplandosi*; così se al 4, ch' esprime dell' unità, farassi precedere una cifra, allora ci esprimerà delle decine, se due delle centinaia, se tre delle migliaia, e così ec.; per conseguenza camminando da sinistra a destra, ogni cifra verrà a diminuire dieci volte

se stessa, ossia in ogni grado dividerassi per dieci. Di fatti in 400 il 4 esprimerà delle *unità di centinaia*; se poi faraglisi occupare il luogo del primo zero, avrassi 40, cioè ci rappresenterà 4 *decine*, e se in fine faraglisi occupare il posto dell' ultimo zero, avrassi 4; ossia gradatamente il 4 camminando da sinistra a destra, da unità di centinaia si è trasformato in unità semplice, vale a dire in ogni consecutivo periodo è stato diviso per dieci. Se dunque questa *unità semplice* seguirà il di lei corso da sinistra a destra, nel primo periodo diverrà $\frac{4}{10}$, nel secondo $\frac{4}{100}$, nel terzo $\frac{4}{1000}$, e così ec. o sia verrà in ogni periodo divisa per dieci. Or questo periodico decrescimento di dieci in dieci ha fatto assegnare al calcolo, che si adopera, il nome di *decimale*, ed il di lui vantaggio consiste nel darsi alla frazione la forma di uno intero.

Intanto può una espressione esser composta da quantità intere, e da frazioni decimali, come per esempio $6 + \frac{4}{10}$; era dunque necessario un segno, che marcasse il termine delle unità, ed il principio de' decimali; or si è generalmente convenuto di servirsi, a tale uopo, di una *virgola*, che collocasi a tal *termine* ossia alla dritta delle unità semplici. Così per esprimere $341 + \frac{1}{10}$ scriverassi 341, 1. Ed in tal modo per marcare, che nella espressione $1347 + \frac{3}{1000}$, tra gl' *interi* ed i *millesimi* non esistono de' *decimi*, e

de' *centesimi*, farassi $1347 + \frac{3}{1000} = 1347,003$, e così ec.

Se poi avrassi un decimale il di cui numeratore fosse *compleso*, come per esempio $45 + \frac{748}{1000}$ si esprimerebbe per 45, 748, dappoichè

$$45 + \frac{748}{1000} = 45 + \frac{700}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{8}{1000} \\ = 45 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = 45,748.$$

Se poi l'espressione sarà solamente composta da frazioni decimali, come $\frac{475}{1000}$, allora per mostrare la deficienza degli interi, farassi la virgola precedere da un zero, e così sarà

$$\frac{475}{1000} = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 0,475$$

§ 16. Dagli esposti esempî vedrassi facilmente, che un decimale, non è che una frazione, che ha per denominatore l'unità seguita da tanti zeri, quanto sono le cifre decimali nel numeratore.

Dunque trasformerassi in decimale forma una frazione il di cui denominatore è 10, 100, 1000, ec. con iscrivere il numeratore alla destra della virgola, in modo che il posto dell'ultima cifra decimale della virgola sia eguale al numero degli zeri del denominatore.

$$\text{Così sarà } \frac{4}{10} = 0,4, \frac{685}{1000} = 0,685$$

$$\frac{5}{1000} = 0,005, \text{ ed in fine}$$

$$685 + \frac{7}{10000} = 685,0007$$

Ed all' inversa si trasformerà un decimale in una frazione ordinaria, con mettervi per numeratore le cifre decimali, con far loro corrispondere per denominatore l' unità seguita da un numero di zeri eguali al numero de' decimali.

Così sarà $0,845 = \frac{845}{1000}$, e $6,4256 = 6 + \frac{4256}{10000}$.

Inoltre considerando il carattere distintivo de' decimali deducesene:

1.° *Che di due decimali colle stesse prime cifre, quello è maggiore, che ha qualche cifra significativa di più.*

Così $0,765 > 0,76$.

2.° *Se le prime cifre de' decimali non saranno le stesse, il più grande è quello, che le ha maggiori.*

Così $0,547 > 0,53999$, non ostante che a questo secondo si uniranno infinite cifre.

Di più se ad una frazione decimale uniravvisi uno o più zeri, essa aumenterà egualmente e nel numeratore, e nel denominatore, e per conseguenza (§ 10) rimarrà l' istessa.

Dunque l' unione degli zeri non altererà il valore di un decimale.

Moltiplicando poi un decimale per 10, si vede dal precedente, che le unità diverranno decime, i decimi unità, i centesimi decimi, e così ec. Ma ciò esprimeasi con tirar la virgola a destra.

Dunque si moltiplica un decimale per 10, 100, ec. con tirar la virgola a destra per tante cifre, quanti

sonovi di zeri nel moltiplicatore. Ed al contrario divisi per 10, per 100, ec. con avanzar la virgola di uno, di due gradi ec. verso la sinistra.

Così $(4, 567) 100 = 456,7$, e $4, 5834 : 10 = 0,45834$.

Delle operazioni su i decimali.

Somma e Sottrazione.

§ 17. La somma e la sottrazione delle frazioni decimali deducesi dalla loro stessa natura; dappoichè siccome (§ prec.) dieci millesimi danno un centesimo, nella maniera istessa, che dieci unità danno una decina, e dieci centesimi una decina, nel modo istesso, che dieci decine un centinaio, e così ec. ne segue, che effettuerrassi la somma, o la sottrazione nel modo istesso di quello delle quantità intere, cioè:

Si sommeranno o sottrarranno i decimali scrivendoli pria l'uno sotto l'altro, in modo che le virgole siano nella stessa colonna verticale, ed indi farassene la somma o la sottrazione, con iscrivere nel risultato la comune virgola sotto le altre.

Ecco degli esempî di somma, e sottrazione.

ESEMPIO I.^o

» Vogliasi la somma di $452,4682 + 32,213 + 4,3156$
farassi

452, 4682

32, 213

4, 3156

Somma = 488, 9968

ESEMPIO 2°

348, 4523

2, 304

0, 49

Somma = 951, 2463

1°

» Vogliasi la differenza di 6, 00435 — 0, 17

farassi 6, 00435

0, 17

Differenza = 5, 83435

2°

» Cercasi la differenza 0, 4321, — 0, 3456

farassi 0, 4321

0, 3456

Differenza = 0, 0865

Ma se la quantità da sottrarsi avrà un numero di cifre maggiore della *minuenda*, ma però le prime di questa avranno un valore maggiore delle prime di quella, allora essendo (§ prec.) la seconda, benchè di un numero minore di cifre, maggiore della prima, in tal caso si eguaglieranno le cifre, con unire degli zeri alla minuenda, [per locchè (§ 16) non si altererà il suo valore] ed indi farassene la sottrazione.

Così volendo la differenza di 0, 62 — 0, 3697

farassi 0, 6200

0, 3697

Differenza = 0, 2503

Moltiplicazione de' decimali.

§ 18. Non essendo (§ 15) le frazioni decimali che rotti ordinari sotto una forma particolare, la maniera dunque di moltiplicarle e dividerle dovrà direttamente dedursi dalla moltiplica, e divisione de' rotti. Incominciando dalla moltiplicazione come ne' rotti ordinari, può un numero intero esser fattore di un decimale, o pure una frazione decimale di un'altra della stessa natura.

Vogliasi nel primo caso il prodotto di $(34, 137) 9$.

Per quanto si è detto sarà $34, 137 = 34 + \frac{137}{1000}$, perciò $(34, 137) 9 = (34 + \frac{137}{1000}) 9 = 306 + \frac{1000}{1000} + \frac{253}{1000} = 307 + \frac{253}{1000}$. Ma (§ 16) $307 + \frac{253}{1000} = 307, 253$; dunque avrassi $(34, 137) 9 = 307, 253$. Or potendo aver luogo l'istesso ragionamento per qualunque si fosse altro decimale, dappoichè come si sa (§ 13) nella moltiplicazione di un rotto per un intero non viene alterato il denominatore del primo, deducesi;

Che si moltiplica un intero per un decimale facendo il prodotto del primo per il secondo, ed indi con distaccare tante cifre decimali, quanti decimali esistono nel fattore.

Passando al secondo caso, vogliasi il prodotto de' due decimali $(4, 12) (3, 7)$.

$$\text{Or } (\S 16) (4, 12) (3, 7) = \left(4 + \frac{12}{100}\right) \left(3 + \frac{7}{10}\right)$$

e verificando la moltiplica (§ 13) si avrà

$$\begin{aligned} \left(4 + \frac{12}{100}\right) \left(3 + \frac{7}{10}\right) &= 12 + \frac{36}{100} + \frac{28}{10} + \frac{84}{1000} \\ &= 12 + \frac{360}{1000} + \frac{2800}{1000} + \frac{84}{1000} \\ &= 15 + \frac{244}{1000} \end{aligned}$$

$$\text{Ma } (\S \text{ antec.}) 15 + \frac{244}{1000} = 15, 244,$$

perciò sarà $(4, 12) (3, 7) = 15, 244$.

L'istesso ragionamento avrà luogo per qualunque si fosse altro decimale. Difatti, considerando i due fattori decimali come interi, si avrebbe un prodotto maggiore di quanto sarebbe quello de' loro denominatori, e perciò, per ottenerne il vero, bisognerà dividerlo per il prodotto di essi denominatori. Ma il prodotto di

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} &= 0,1 \times 0,01 = \frac{1}{1000} = 0,001, \text{ quello di} \\ \frac{1}{100} \times \frac{1}{1000} &= 0,01 \times 0,001 = 0,00001, \text{ e così per altri} \\ &\text{decimali, perciò deducesene:} \end{aligned}$$

Che la moltiplicazione de' decimali farassi al solito, senza curar le virgole; ma quanti decimali saranno ne' fattori, tante cifre a destra si separeranno, ossia nel prodotto il numero delle cifre decimali eguaglierà la somma di quelle de' due fattori.

Ecco degli esempi:

43, 7	2, 4542	4, 12
1, 3	0, 053	3, 7
1311	73626	2884
457	122710	1236
568,1	0,1300726	15,244

Della divisione delle frazioni decimali.

§ 19. Un decimale può esser diviso, come ne' rotti ordinari, da uno intero, o pure un decimale da un altro. Per il primo caso abbiassi 451,59 da dividersi per 13. Essendo $451,59 = 451 + \frac{59}{100} = \frac{45159}{100}$, sarà $(451,59):13 = (\frac{45159}{100}):13$; e verificando la divisione (§ 14) si avrà

$$\left(\frac{45159}{100}\right):13 = (451,59):13 = 34 + \frac{959}{1300}$$

E siccome qualunque siasi il decimale dovrà sempre esser diviso per l'intero seguito da un numero di zeri eguale a quello delle cifre decimali, così generalmente ne segue:

Che si divide un rotto decimale per un intero, sopprimendo la virgola nel dividendo, ed aggiungendo alla dritta del divisore tanti zeri, quanto sono i decimali, ed in fine verificando al solito la divisione.

Passando al secondo caso, con supporre sì il divisore che il dividendo de' decimali, rifletterassi, che essendo la divi-

sione l'operazione inversa della moltiplica, se nel risultato di questa si uniscono le cifre decimali de' due fattori, in quella dovranno sottrarre.

Infatti volendo dividere 8, 445 per 3, 22, essendo

$$(\S 16) 8,445 = 8 + \frac{445}{1000} = \frac{8445}{1000}, \text{ e } 3,22 = 3 + \frac{22}{100} = \frac{322}{100}$$

$$\text{si avrà } \frac{8,445}{3,22} = \left(\frac{8445}{1000} \right) : \left(\frac{322}{100} \right) = \frac{(8445) 100}{(322) 1000}.$$

Ma per la natura de' rotti, moltiplicare per un fattore il numeratore di una frazione, corrisponde a dividere per il fattore istesso il suo denominatore, e moltiplicare il denominatore è l'istesso, che dividere il suo numeratore.

Perciò sarà

$$\frac{8,445}{3,22} \left(= \frac{(8445) 100}{(322) 1000} \right) = \frac{(8445) : 322}{1000 : 100} = \frac{(8445) : 322}{10}$$

cioè de' *millesimi* divisi da *centesimi* daranno de' *decimi*, o sia un numero di cifre eguale alla differenza tra il numero de' decimali del dividendo, con quello del divisore; e siccome in generale dividendo l'unità seguita da più zeri per se stessa seguita da un minor numero di zeri, il quoziente che risultane è uguale all'unità seguita da un numero di zeri espresso dalla differenza tra quei del dividendo e del divisore; così l'addotto ragionamento avrà luogo generalmente per qualunque si fosse frazione decimale, e perciò:

La divisione de' decimali farassi al solito, ma si

separeranno nel quoziente tante cifre a destra, quanti decimali avrà il dividendo più del divisore.

Se poi il divisore ha più decimali del dividendo, si aggiugneranno a quest' ultimo degli zeri quali (§ 16) non altereranno il di lui valore, e per conseguenza assoggettarassi alla premessa generale regola.

§ 20. Eseguita la divisione tra il numeratore del dividendo, e quello del divisore, se quest' ultimo non entra un esatto numero di volte nel primo, risulteranne un *rotto proprio ordinario*. Eccoci dunque nella necessità, quale utilissima applicazione, di dar la maniera di trasformare un *rotto ordinario*, in *decimale*; questa maniera poggia sulla proprietà, che ha lo zero posto a man destra di una cifra di decuplarla.

Difatti abbiassi il *rotto proprio* $\frac{A}{B}$, essendo $B > A$, ma suppostolo minore di 10 A ; dunque se metterassi alla destra del numero A un zero desso diverrà maggiore di B , ma nel tempo istesso aumenterà dieci volte il suo proprio valore; perciò così aumentato A potrassi dividere per B , ed il suo quoziente sarà dieci volte maggiore del vero, dunque per aver l'*effettivo quoziente* bisognerà dividerlo per 10 ossia allocarlo nei *decimi*. Non entrando B in A decuplato un esatto numero di volte avrassi un residuo $r < B$. Ma come sopra, posto un zero alla di lui destra diverrà $r > B$, ma nel tempo istesso dieci volte maggiore del suo valore già pria decuplato, dunque po-

trassi dividere r per B , ma il suo quoziente sarà cento volte maggiore del vero, perciò per avere l'effettivo bisognerà dividerlo per 100, vale a dire assegnargli il posto di *centesimo*. Seguendo lo stesso ragionamento al terzo quoziente gli apparterrà il posto di *millesimo*, al quarto di *diecimillesimo*, e così di seguito.

Trasformerassi perciò un rotto proprio in una frazione decimale, con unire al primo degli zeri, ed indi dividendolo per il suo denominatore distaccare nel quoziente tanti decimali per quanti zeri sonosi aggiunti al suo numeratore.

Ecco degli esempi:

Eseguita la divisione (§ prec.) nella frazione

$$\left(\frac{8,445}{3,22}\right) = \frac{(8445):322}{10} \text{ avrassi}$$

$$\left(\frac{8,445}{3,22}\right) = 2 + \frac{6}{10} + \frac{73}{(322)10} = 2 + \frac{2005}{3220}$$

Or per ridurre a decimale la frazione $\frac{2005}{3220}$ vi si aggu-
gneranno al di lei numeratore quattro zeri per cui avrassi
 $\frac{20050000}{3220}$, e verificata la divisione otterrassi

$$\frac{20050000}{3220} = 6226 + \frac{228}{3220}$$

Ma essendo quattro gli aggiuntivi zeri, quattro esser do-
vranno i decimali da distaccarsi, e perciò si avrà

$$\frac{8,445}{3,22} = 2,6226 \text{ con un residuo } 228.$$

» Vogliasi ridurre in decimale il rotto $\frac{1}{8}$. »

Aggiuntivi tre zeri all'unità avrassi $\frac{1000}{8}$, e verificata la divisione si otterrà $\frac{1000}{8} = 125$, e per conseguenza (per l'antecedente) $\frac{1}{8} = 0,125$.

» Ridurre in decimale il rotto $\frac{4}{797}$. »

Per una maggiore approssimazione unendovi sei zeri al suo numeratore, avrassi $\frac{4000000}{797}$, e verificata la divisione otterrassi $\frac{4000000}{797} = 5018 +$ un residuo 654, e perciò (per l'antecedente) $\frac{4}{797} = 0,005018$.

§ 21. Ripresa (§ prec.) la generale espressione di un *rotto proprio*, come si è fatto vedere, moltiplicando A per 10, e chiamando q il quoziente, sarà $\frac{A \times 10}{B} = q$, e perciò $\frac{A}{B} = 0, q$. Dunque tutte le volte sarà B esatto divisore di 10 il quoziente non avrà residuo alcuno, e per conseguenza potrassi in decimale ottenere l'esatto valore di $\frac{A}{B}$.

Se però non sarà B un esatto divisore di 10, allora avrassi un residuo, e perciò del *rotto proprio* non potrà averisi l'esatto valore in *decimale*. Ma il 10 non è divisibile che per 2, o per 5:

» Dunque sarà esattamente riducibile un *rotto proprio* in decimale, tutte le volte, che il suo denominatore

sarà il 2, o il 5, o pure sarà un numero formato dalla successiva moltiplica di se stesso con il 2, o con il 5.

Così per il rotto $\frac{1}{8}$, sarà $A=1$, $B=8=2 \times 2 \times 2$, e perciò $\frac{1}{8} \left(= \frac{A}{B} \right) = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$; ed essendo 10 divisibile per 2, si è trasformato esattamente (§ prec.) $\frac{1}{8} = 0,125$.

E per l'istessa ragione otterrassi

$$\frac{4}{125} = 0,032, \text{ perchè } \frac{4}{125} = \frac{4}{5 \times 5 \times 5}$$

Se però non sarà il denominatore B un divisore esatto di 10, allora si avranno de' residui, ed ogni residuo sarà minore del divisore B . Ma essendo B limitato, egualmente esserlo dovrà il numero de' differenti residui, e per conseguenza all'ultimo periodo, non potendo mai il residuo nè eguagliare, nè esser maggiore del divisore, dovrà necessariamente riprodursi nell'ordine istesso. Al momento dunque che otterrassi di nuovo il medesimo residuo, le stesse cifre succederansi nell'ordine istesso.

Or codeste frazioni sonosi nominate *periodiche*; per conseguenza tali saranno tutte quelle frazioni delle quali non se ne può ottenere un esatto valore; ma bensì uno *approssimativo*.

Ecco degli esempj:

$$\frac{1}{3} = 0,3333, \quad \frac{22}{7} = 3,142857 = 14285714$$

Da ciò infine deducesene, al momento che una frazione decimale presenterà un *periodo*, segno è certo di non potersene ottenere, che un *approssimato valore*.

LEZIONE SECONDA

Teoria degli esponenti, de' radicali e delle quantità immaginarie.

§ 1. Se una quantità a moltiplicherassi una volta per se stessa, avrassi (§ 8 lez. I) $a \times a = a^2$, e per la stessa ragione $a \times a \times a = a^3$, ed in fine a moltiplicata $n - 1$ volte per se stessa, esprimerassi per a^n . Or l'esponente che ne risulta appellasi *potenza*, e la quantità moltiplicata per se stessa chiamasi *radice*; così a è la seconda potenza di a , ed a la corrispondente radice seconda di a^2 . La radice poi s'indica col segno $\sqrt{}$, così $\sqrt{a^m}$, ci esprime la radice seconda di a^m , $\sqrt[n]{a^m}$ la radice ennesima di a^n : la prima operazione chiamasi *elevare a potenza*, ed *estrarre la radice* di essa la seconda.

Quindi la estrazione della radice è una operazione dell'intuito opposta all'elevazione a potenza, come lo è la sottrazione all'addizione, la divisione alla moltiplica.

Se la seconda potenza di a si ottiene con moltiplicare a una volta per se stessa, e la terza potenza due volte, e la quarta tre, ne segue dunque, che per ottenere l'ennesima potenza di a bisognerà moltiplicarla per se stessa $n - 1$ volte.

Dunque in generale una quantità alzasi ad una data potenza col moltiplicarla per se stessa tante volte meno una per quante sono le unità nello esponente corrispondente alla potenza.

Se dunque l'esponente sarà l'indice della potenza, il calcolo degli esponenti dovrà necessariamente precedere, e completare quello delle potenze.

§ 2. Si è veduto (§ 8 lez. 1), che $a^2 \times a^3 = a^5$, ed in generale $a^n \times a^m = a^{m+n}$, si è egualmente osservato (§ 9 lez. 1) che $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2}$, ed in generale $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, ma $a^{m-n} = a^m \times a^{-n}$ perciò $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$.

Dunque in una frazione qualunque potrà sempre farsi passare il denominatore al numeratore, o all'inversa, con cambiare solamente il segno al di lui esponente.

Esaminando poi l'espressione generale $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, vedrassi che possono accadere tre casi: 1° che sia $m > n$, 2° $m = n$, 3° $m < n$. Nel primo caso di $m > n$ avrassi un esponente positivo, e quindi una potenza positiva; nel secondo caso di $m = n$ avrassi un esponente zero, e perciò una *potenza zero*; nell'ultimo infine avrassi un esponente *negativo*, e per conseguenza una *negativa potenza*. Esaminiamo gli ultimi due casi giacchè il primo non presen-

taci difficoltà alcuna; sia dunque $m=n$, perciò sarà
 $a^{m-m}=a^0$. Ma (lez. 1^a § 9) $a^{m-m}=\frac{a^m}{a^m}=1$; dunque
 $a^{m-m}=\frac{a^m}{a^m}=a^0=1$.

Perciò qualunque quantità elevata alla potenza zero sarà eguale all'unità.

$$\text{Così } (cd)^0 = \left(\frac{m}{r}\right)^0 = 1.$$

Passiamo all'ultimo caso in cui sia $m < n$, chiamando d la differenza sarà $a^{m-n}=a^{-d}$; or $a^{-d}=a^{0-d}$; ma (lez. 1^a § 9) la sottrazione degli esponenti indicaci la divisione, perciò avrassi $a^{-d}=a^{0-d}=\frac{a^0}{a^d}=\frac{1}{a^d}$.

Cioè una potenza coll' esponente negativo equivale all'unità divisa per la medesima potenza coll'esponente positivo.

$$\text{Così sarà } a^{-3}=\frac{1}{a^3}, a^{-4}=\frac{1}{a^4}, a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

§ 3. La moltiplicazione degli esponenti ha luogo tutte le volte dovrassi elevare una quantità con un esponente qualunque ad una data potenza; difatti $a^5=aaaa$, ed $aaaa$ elevata alla quarta potenza diverrà (lez. 2^a § 9) $a^4 a^4 a^4$, ed effettuando la moltiplica avrassi

$$(a^5)^4=a^{4+4+4+4}=a^{12}=a^3 \times 4$$

Or siccome il medesimo ragionamento ha luogo per qualunque altra potenza, è chiaro in generale che a^m in-

nalzata alla potenza n , è eguale ad a^{mn} . Per la ragione istessa sarà $(a^m b^n c^p)^r = a^{mr} b^{nr} c^{pr}$. Così pure il binomio $a+b$ innalzato alla potenza m è eguale ad $(a+b)^m$, e di nuovo elevato alla potenza n diverrà $(a+b)^{mn}$. Non essendo poi il coefficiente che una quantità funzionante da fattore, eleverassi alla ennesima potenza (§ 1. lez. 2^a) con moltiplicarlo per se stesso $n-1$ volte.

Dunque in generale elevasi un monomio ad una potenza ennesima col moltiplicare il suo coefficiente per se stesso $n-1$ volte, ed il di lui esponente per la potenza n .

$$\text{Così sarà } (3a^2 b^7)^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 a^{10} b^{35} = 243 a^{10} b^{35}.$$

Se l'esponente n della potenza, cui vuolsi elevare la data quantità a , sarà negativo, in tal caso sarà

$$(a)^{-n} = a^1 \times^{-n} = a^{-n}. \text{ Ma (§ 2 lez. 2^a) } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dunque per elevare una quantità data ad una potenza negativa, non altro dovrassi fare, che dividere l'unità per la potenza medesima, ossia per la quantità elevata presa positivamente.

$$\text{Così sarà } \left(\frac{5p^2}{4q}\right)^{-2} = \frac{\frac{1}{9p^4}}{\frac{1}{16q^2}} = \frac{16q^2}{9p^4}.$$

§ 4. Non essendo le quantità complesse, che la riunione di più monomi, l'elevazione a potenza di un binomio, di

un trinomio, di un polinomio, eseguirassi nel modo istesso di quella di un monomio.

Ciò posto consideriamo le varie potenze di un binomio $(a+b)^2$; sia $n=2$ avrassi allora (§ 1 lez. 2^a)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)^{2-1} = (a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2);$$

sia $n=3$ si avrà $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^{3-1} = (a+b)(a+b)^2$
 $= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$
 e così per le ulteriori potenze.

Or se il binomio $(a+b)$ dovrebbersi elevare ad una potenza molto alta, sarebbe cosa lunga l'eseguire tante successive moltiplicazioni, ciò ha indotto gli analisti a trovare un metodo, per cui facile riuscirà una tale elevazione.

Or l'osservazione ci guiderà al rinvenimento di sì interessante formola. A tale uopo moltiplicando con se stesso per un numero successivo di volte il binomio $(a+b)$, avrassi la seguente tavola delle successive potenze di esso.

$$1.^a (a+b)^1 = a+b$$

$$2.^a (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3.^a (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4.^a (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$5.^a (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$6.^a (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

E così ec.

Osservando ora la legge progressiva di codesta tavola,

vedrassi primieramente, che nel caso della somma de' due termini del binomio, tutti quei del suo sviluppo saranno positivi. Dai segni passando alle lettere vedrassi, che il primo termine contiene a innalzata alla potenza corrispondente; nel secondo termine vi è a elevata alla data potenza diminuita di una unità, e moltiplicata per b ; nel terzo a innalzata alla data potenza diminuita di due unità, e moltiplicata per b^2 , e così di seguito gli esponenti vanno continuamente diminuendo in a di una unità, e quelli di b crescendo della unità istessa, in modo che la somma degli esponenti di a, b in ciascun termine sarà eguale all'esponente della data potenza, finchè finalmente svanirà l'esponente di a , e quello di b diverrà eguale al grado della potenza.

Dunque per la potenza emmesima di $(a+b)$ i segni, le lettere e gli esponenti ci verranno indicati per la serie $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \dots + ab^{m-1} + b^m$, dedotta per induzione la legge degli esponenti, fa di mestieri dedurre quella de' coefficienti. Ma pria osservisi, che dopo il massimo coefficiente ritornano gli stessi precedenti, ma con ordine inverso; dunque segueno, che per ritrovare la loro legge progressiva, basta giugnere nelle potenze pari sino al coefficiente medio, e nelle dispari sino al primo de' due medi, gli altri saranno i coefficienti già ritrovati presi inversamente.

Ciò posto riandando alla superiore tavola vedrassi facilmente, che sarà

$$(1) (a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(2) (a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) = a^2 + \frac{2ab}{1} + \frac{2 \cdot 1 \cdot b^2}{1 \cdot 2}$$

$$(3) (a+b)^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ = a^3 + \frac{3a^2b}{1} + \frac{3 \cdot 2ab^2}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b^3}{3 \cdot 2}$$

$$(4) (a+b)^4 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \\ = a^4 + \frac{4a^3b}{1} + \frac{4 \cdot 3a^2b^2}{2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2ab^3}{2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

E così ec.

Esaminando questo quadro facilmente vedrassi, che saranno i successivi coefficienti derivati dagli esponenti successivi, già da noi calcolata essendo la progressiva legge del loro andamento. Difatti i primi termini di ciascuna potenza non avranno per coefficiente che l'unità, i secondi termini avranno per loro coefficiente l'esponente del primo termine diviso per l'unità, perciò $\frac{m}{1}$; i terzi termini avranno per loro coefficiente quello dell'antecedente moltiplicato pel di lui esponente diviso per due, sarà dunque $= m \left(\frac{m-1}{1 \cdot 2} \right)$, i quarti termini avranno per loro coefficiente quello del terzo moltiplicato pel suo esponente, e diviso per 3; ossia sarà $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, della maniera

istessa dedurrassi il coefficiente del quinto termine

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Dunque chiamando n il numero dei termini, un termine qualunque l'ennesimo avrà per suo coefficiente

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots[m-(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-1}$$

Determinata la legge progressiva degli esponenti e dei coefficienti, sostituendo ora codesti valori avrassi la seguente generale formola contraddistinta col nome di *Binomio Newtoniano*, cioè

$$\begin{aligned} (a+b)^m = & a^m + \frac{ma^{m-1}b}{1} + m\left(\frac{m-1}{1 \cdot 2}\right)a^{m-2}b^2 \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 \dots\dots \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots\dots\dots (n-1)}a^{m-n+1}b^{n-1} \end{aligned}$$

Ma forse codesta formola, che avrà luogo per $(a+b)^m$, supposto p. e. $m=3$, non lo avrà per $(a+b)^{m+1}$, vale a dire per $(a+b)^4$. Or noi dimostreremo, che se avrà luogo la legge ritrovata per la formola $(a+b)^m =$ ec. lo avrà eziandio per $(a+b)^{m+1}$, ed avrassi

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} = & a^{m+1} + (m+1)a^m b + \frac{(m+1)(m)}{1 \cdot 2}a^{m-1}b^2 \\ & + m\frac{(m+1)(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-2}b^3 + \text{ec.} \end{aligned}$$

Infatti come si sa dagli stabiliti principi, otterrassi la potenza di $(a+b)^{m+1}$ moltiplicando $(a+b)^m$ per $(a+b)$.

Or verificata codesta moltiplica otterrassi

$$\begin{aligned} (a+b)^m (a+b) &= (a+b)^{m+1} \\ &= a^{m+1} + ma^m b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-1} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-2} b^3 + \text{ec.} \\ &\quad + a^m b + ma^{m-1} b^2 + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^3 + \text{ec.} \\ &\quad + \text{ec.} \end{aligned}$$

e riducendo sotto comuni fattori avrassi

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} &= a^{m+1} + (m+1)a^m b + \left(\frac{m(m-1)}{2} + m \right) a^{m-1} b^2 \\ &\quad + \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} + m \frac{(m-1)}{2} \right) a^{m-2} b^3 + \text{ec.} \end{aligned}$$

$$\text{Ma } m \frac{(m-1)}{2} + m = m \left(\frac{(m-1)}{2} + 1 \right) = m \frac{(m+1)}{2}$$

$$\text{Ed } m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} + m \frac{(m-1)}{2} = \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} = \frac{m(m-1)(m+1)}{2 \cdot 3}$$

Alla fine sostituendo codesti ridotti coefficienti avrassi

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} &= a^{m+1} + (m+1)a^m b + \frac{(m+1)(m)}{2} a^{m-1} b^2 \\ &\quad + \frac{(m+1)(m-1)(m)}{2 \cdot 3} a^{m-2} b^3 + \text{ec.} \end{aligned}$$

Dunque se la formola newtoniana si verifica in una data potenza, avrà luogo egualmente nella potenza seguente; e siccome è certamente vera nelle prime potenze, lo sarà perciò egualmente in tutte le altre.

§ 5. Se invece del binomio $(a+b)^m$ avrebbesi $(a-b)^m$

allora la suddetta formola ricavata ce ne darebbe lo sviluppo con sostituire solamente a b il di lui negativo valore $-b$. Difatti presa la formola generale, e posto $-b$ per b , avrassi

$$(a-b)^m = a^m + ma^{m-1} \times -b + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} \times b^2 \\ + m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} \times -b^3 + \text{ec.}$$

Or verificate le moltipliche dedurrassene, che nel binomio $(a-b)^m$ i termini impari resteranno positivi, ed i pari cangeransi in negativi, e si avrà

$$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 - m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 \\ + \text{ec.}$$

Ed in generale

$$(a \pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \dots \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-1} a^{m-n+1}b^{n-1}$$

Nella quale formola l'ultimo generale termine se sarà n impari avrà il segno positivo, negativo se sarà pari; formola, che abbraccia lo sviluppo della somma, o della differenza di un binomio elevato a potenza intera positiva.

Supponiamo per ora (*) che la formola suddetta abbia ancora luogo per m frazionaria, e sia $m = \frac{h}{k}$; sostituendo tal valore nella dedotta formola, avrassi

$$(a \pm b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} \pm \frac{h}{k} a^{\frac{h}{k}-1} b + \frac{h}{2k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) a^{\frac{h}{k}-2} b^2 \\ \pm \frac{h}{2 \cdot 3k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) \left(\frac{h}{k} - 2 \right) a^{\frac{h}{k}-3} b^3 + \text{ec.}$$

Ed effettuando l'accennata moltiplica, e ridotti gli esponenti allo stesso denominatore, avrassi

$$(a \pm b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} \pm \frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} b + \frac{h}{2k} \left(\frac{h-k}{k} \right) a^{\frac{h-2k}{k}} b^2 \\ \pm \frac{h(h-k)(h-2k)}{k \cdot 2k \cdot 3k} a^{\frac{h-3k}{k}} b^3 + \text{ec.}$$

§ 6. La formola newtoniana non ci dà solamente lo sviluppo di un binomio, ma eziandio quello di un trinomio, di un quattrinomio, e di un polinomio qualunque; difatti volendo lo sviluppo del trinomio $(a+b+c)^m$ farassi $b+c=q$, e perciò otterrassi

(*) La dimostrazione rigorosa del binomio elevato ad una potenza, o intera o frazionaria, richiedendo una più speditezza nel maneggio del calcolo, e la conoscenza della generale teoria delle equazioni, rapporterassi perciò nella quinta, ed ultima lezione.

$$(a+q)^m = a^m + ma^{m-1}q + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}q^3 + \text{ec.}$$

Or essendo $q=b+c$, sostituendo i rispettivi valori, avrassi

$$(a+b+c)^m = a^m + ma^{m-1}(b+c) + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}(b+c)^2 \\ + m\frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}a^{m-3}(b+c)^3 + \text{ec.}$$

ed in fine sarà

$$(a+b+c)^m = a^m + ma^{m-1}(b+c) + m\frac{(m-1)}{2}(b^2 + 2bc + c^2)a^{m-2} \\ + m\frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}(b^3 + 3bc^2 + 3b^2c + c^3)a^{m-3} + \text{ec.}$$

Della maniera istessa se avrassi $(a+b+c+d)^m$ otterrassene il di lui sviluppo facendo $b+c+d=p$, allora essa diverrà

$$(a+p)^m = a^m + ma^{m-1}p + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}p^2 + \text{ec.}$$

Or essendo p^2 un trinomio innalzato alla seconda potenza, sviluppo già precedentemente conosciuto, avrassi perciò quello di p^3, p^4 , e così ec. Dunque sostituendo codesti valori nella formola $(a+p)^m$ avrassi lo sviluppo del proposto quattrinomio $(a+b+c+d)^m$; e fatti in fine gli stessi ragionamenti, dedurrassene lo sviluppo di un polinomio elevato all'emmesima potenza.

§ 7. Pria di dar fine a sì interessante teoria per quanto in appresso dirassi, cosa necessaria crediamo l'analizzare le costituenti parti di un binomio elevato a quadrato, ed a cubo, ed indi quello di un trinomio.

Sia perciò $m=2$ avrassi

$$(a+b)^m = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cioè il quadrato di un binomio contiene i quadrati di ciascun termine, ed il doppio prodotto del primo per il secondo.

Sia b negativo (§ 5 l. 2^a) avrassi $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cioè il quadrato della differenza di un binomio conterrà i quadrati di ciascun termine, meno il doppio prodotto del primo per il secondo.

Se dunque di un binomio elevato a quadrato avrassi solamente due termini, riuscirà facile il compierlo. Difatti data l'espressione monca $a^2 + 2ab$ aggiungendovi il quadrato di b , otterrassi il perfetto quadrato

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Sia $m=3$ applicando la detta formola generale avrassi

$$(a+b)^m = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ cioè:}$$

La terza potenza di un binomio conterrà i cubi de' suoi due termini, ed i tripli prodotti de' quadrati di ciascun termine per l'altro.

Per la ragione istessa poi già detta per il quadrato sarà dunque facile compierlo essendo imperfetto.

Vogliasi ora il quadrato di un trinomio $(a+b+c)^2$. In tal caso presa la formola generale del (§ prec.) sarà $m=2$, ed avrassi

$$(a+b+c)^m = (a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

Dunque il quadrato di un trinomio conterrà i quadrati de' termini, ed i doppi prodotti del primo per il secondo, del primo per il terzo, e del secondo pel terzo.

Sia ora $c=m+q$, sostituendo, e riducendo avrassi

$$(a+b+m+q)^2 = a^2 + b^2 + m^2 + q^2 + 2ab + 2am + 2aq + 2bm + 2bq + 2mq$$

Cioè il quadrato di un quattrinomio conterrà i quadrati de' quattro termini, il doppio prodotto del primo termine, per il secondo, per il terzo, e per il quarto, il doppio prodotto del secondo per il terzo, e quarto, ed il doppio prodotto del terzo per il quarto.

Chiamando dunque n il numero de' termini di un polinomio:

Il di lui quadrato conterrà i quadrati di n termini, più i doppi prodotti di essi per tutti quelli che li sieguono.

§ 8. Essendo (§ 1 l. 2^a) l'estrazione della radice l'operazione inversa della elevazione a potenza, ed avendo noi dimostrato (§ 3 l. 2^a) che si eleva una quantità ad una potenza qualunque moltiplicando l'esponente della quantità per quello della potenza, ne segue:

Che si otterrà la radice di una quantità dividendo l'esponente di essa per il grado della potenza cui la radice appartiene, o sia per l'esponente della radice.

Così $a^{\frac{m}{n}}$ ci esprime la radice ennesima di a^m ; riguardo al coefficiente se ne esporrà il modo trattandosi di estrarre

le radici delle quantità numeriche; se dunque l'esatto valore della radice di una quantità ci viene determinato dal quoziente dello esponente di una quantità, per il grado della radice, ne segue perciò, che tutte le volte non sarà perfettamente divisibile l'esponente suddetto, da quello della radice non potrà mai ottendersi una radice esatta. Or code-
ste radici appellansi *inassegnabili* per non potersi esatta-
mente determinare, e solamente si marcano col segno $\sqrt{}$.
Così sarà $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$, ciò ha eziandio luogo per
le quantità complesse, in modo che avrassi

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}, (a+b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a+b}, (a+b)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(a+b)^n}$$

La riduzione de' radicali sotto la forma frazionaria, ren-
deli idonei a tutte quelle operazioni, che appartengono ai
rotti. Dunque potranno ridursi alla *minima espressione*,
allo stesso denominatore, *sommarsi*, *sottrarsi*, *moltiplicarsi*,
e dividersi.

Si riduce un radicale alla minima espressione con uscire
di sotto il segno radicale quel fattore da cui se ne può fa-
cilmente estrarre la radice, e per conseguenza, che avrà
per esponente quello della radice. Difatti essendo

$$\sqrt[m]{ab^m} = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{m}{m}} \text{ sarà } \sqrt[m]{ab^m} = b \sqrt[m]{a}. \text{ Sia } m=3 \text{ otterrassi}$$

$$\sqrt[3]{ab^3} = b \sqrt[3]{a}. \text{ Abbiassi ora l'espressione complessa}$$

$$\sqrt{(a^2b + a^3m)}; \text{ essendo } \sqrt{(a^2b + a^3m)} = \sqrt{[a^2(b + am)]}$$

$$\text{sarà } \sqrt{(a^2b + a^3m)} = a \sqrt{(b + am)}.$$

L'operazione di ridurre gli esponenti sotto l'istesso denominatore nel nostro caso corrisponde ad esprimere molti diversi radicali sotto l'istessa radice. Difatti abbiansi i due radicali

$$\sqrt[m]{a^r}, \sqrt[n]{b^q}; \quad \sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}, \sqrt[n]{b^q} = b^{\frac{q}{n}}$$

e riducendo gli esponenti al medesimo denominatore, avrassi

$$\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{nr}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{nr}}, \text{ e } \sqrt[n]{b^q} = b^{\frac{mq}{mn}} = \sqrt[mn]{b^{mq}}$$

quantità, che avendo il denominatore istesso ne' loro esponenti, saranno sottoposte allo stesso radicale.

§ 9. Ridotti i radicali sotto la suddetta forma sarà facile trovar la maniera di moltiplicarli, e dividerli. Or i radicali possono essere, o della stessa, o di differente specie; ma (§ prec.) mediante la riduzione allo stesso denominatore de' loro esponenti, possono i secondi ridursi nella classe de' primi, dunque dato il modo di moltiplicare i primi, sarà dato quello di moltiplicare i secondi.

Per incominciare dal caso più semplice supponghiamo ne' due fattori sotto radicale dell'istessa specie, l'istessa lettera col medesimo esponente; vale a dire cerchiamo la formola esprimente il prodotto di $\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{a^m}$. Or (§ pr.) avrassi $\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{a^m} = a^{\frac{m}{r}} \times a^{\frac{m}{r}} = a^{\frac{2m}{r}}$. Sia ora $r=3$, $m=6$, sostituendo sarà

$$\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{a^m} = \sqrt[r]{a^{2m}} = a^{\frac{2m}{r}} = \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

Sia nella ridotta formola $m=r$ allora avrassi

$$\sqrt[r]{a^r} \times \sqrt[r]{a^r} = a^{\frac{2r}{r}} = a^2$$

Cioè il prodotto di due radicali dell'istessa specie, che conterranno l'istessa lettera con eguale esponente a quello della radice, eguaglierà il quadrato della lettera istessa.

Abbiassi $\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{a^m}$, e verificati i calcoli si ridurrà eguale ad $a^{\frac{3m}{r}}$, e fatto $m=r$, avrassi

$$\sqrt[r]{a^r} \times \sqrt[r]{a^r} \times \sqrt[r]{a^r} = a^{\frac{3r}{r}} = a^3$$

Cioè il prodotto di tre radicali della stessa specie che conterranno l'istessa lettera coll'esponente eguale a quello della radice, eguaglierà il cubo della radice istessa.

Alla fine chiamando Q il prodotto di un numero n di radicali, avrassi $Q = a^{\frac{nm}{r}}$, e supposto $m=r$ si avrà $Q = a^n$:

Cioè il prodotto generalmente di un numero n di radicali della stessa specie che conterranno l'istessa lettera coll'esponente eguale a quello della radice eguaglierà l'ennesima potenza della lettera istessa.

Cerchiamo ora il prodotto di due radicali della stessa specie, che contengono delle quantità differenti. Vogliasi il prodotto di $\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{b^m}$ essendo $\sqrt[r]{a^m} = a^{\frac{m}{r}}$,

$$\sqrt[r]{b^n} = b^{\frac{n}{r}} \text{ sarà}$$

$$\sqrt[r]{a^m} \times \sqrt[r]{b^n} = a^{\frac{m}{r}} \times b^{\frac{n}{r}} = (a^m b^n)^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a^m b^n}$$

Dunque due radicali della stessa specie si moltiplicheranno tra loro col porre sotto il comune radicale il prodotto delle rispettive grandezze.

Le quantità complesse non essendo, che l'unione di più quantità semplici, ne segue, che le stesse regole, che avranno luogo per le ultime, lo avranno per le prime.

ESEMPIO 1°

« Si debbano tra loro moltiplicare le quantità seguenti. »

$$a + 2\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[3]{(a-b)}$$

$$3\sqrt[3]{b} + 6\sqrt[3]{(a-b)}$$

$$3a\sqrt[3]{b} + 6\sqrt[3]{b^2} + 12\sqrt[3]{[b(a-b)]} + ba\sqrt[3]{(a-b)}$$

$$+ 12\sqrt[3]{[b(a-b)]}$$

$$+ 24\sqrt[3]{(a-b)^2}$$

E fatte le riduzioni avrassi

$$[a + 2\sqrt[3]{b} + 4\sqrt[3]{(a-b)}][3\sqrt[3]{b} + 6\sqrt[3]{(a-b)}] =$$

$$3a\sqrt[3]{b} + 6\sqrt[3]{b^2} + 24\sqrt[3]{[b(a-b)]} + ba\sqrt[3]{(a-b)}$$

$$+ 24\sqrt[3]{(a-b)^2}$$

ESEMPIO 2.°

$$a + 2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}$$

$$4a - 3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2}$$

$$4a^2 + 8a\sqrt[6]{a^3} + 4a\sqrt[6]{b^2}$$

$$- 3a\sqrt[6]{a^3} \quad - 6\sqrt[6]{a^6} - 3\sqrt[6]{(a^3b^2)}$$

$$+ 2a\sqrt[6]{b^2} \quad + 4\sqrt[6]{(a^3b^2)} + 2\sqrt[6]{b^4}$$

E fatte le riduzioni avrassi

$$(a + 2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2})(4a - 3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2}) =$$

$$4a^2 + 5a\sqrt[6]{a^3} + 6a\sqrt[6]{b^2} - 6a + \sqrt[6]{a^5b^2} + 2\sqrt[6]{b^2}$$

§ 10. Seguendo l'istesso metodo darem la maniera di dividere le quantità sotto l'istesso radicale segno. Vogliasi dunque il quoziente di $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; essendo (§ 8) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$,

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}, \text{ sarà } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Cioè la divisione de' radicali monomj del medesimo nome, fassi come se le quantità non fossero sotto il segno radicale, ma dividendole tra loro, e sottoponendo il quoziente al segno radicale.

Non essendo le quantità complesse che un composto di monomj, nella divisione dunque de' radicali, come nella

moltiplica, avranno luogo le medesime regole per le monomie, e per le complesse quantità; e per conseguenza la divisione de' radicali effettuerassi della maniera istessa di quella delle quantità semplici con alquante modificazioni prodotte dalla natura de' radicali.

Ecco degli esempi.

ESEMPIO 1°

Si debba dividere

$2a^2 - 2a + 12\sqrt{ab} - 18b$, per $a + \sqrt{a} - 3\sqrt{b}$

$$\begin{array}{r}
 2a^2 - 2a + 12\sqrt{ab} - 18b \qquad \qquad \qquad | (a + \sqrt{a} - 3\sqrt{b}) \\
 -2a^2 \qquad \qquad \qquad -2a\sqrt{a} + 6a\sqrt{b} \quad 2a - 2\sqrt{a} + 6\sqrt{b} \\
 \hline
 -2a\sqrt{a} + 12\sqrt{ab} - 18b - 2a + 6a\sqrt{b} \\
 + 2a\sqrt{a} - 6\sqrt{ab} \qquad + 2a \\
 \hline
 + 6a\sqrt{b} + 6\sqrt{ab} - 18b \\
 - 6a\sqrt{b} - 6\sqrt{ab} + 18b \\
 \hline
 0 \qquad 0 \qquad 0
 \end{array}$$

ESEMPIO 2°

Dividere $2a^2 - 3a + a\sqrt{a} + 3\sqrt{a(a+b)} - 2b$, per $a + \sqrt{a} - \sqrt{a+b}$

$$\begin{array}{r}
 2a^2 - 3a + a\sqrt{a} + 3\sqrt{a(a+b)} - 2b \qquad \qquad \qquad | a + \sqrt{a} - \sqrt{a+b} \\
 -2a^2 \qquad -2a\sqrt{a} \qquad \qquad + 2a\sqrt{a+b} \quad 2a - \sqrt{a} + 2\sqrt{a+b} \\
 \hline
 -a\sqrt{a} - 3a + 2a\sqrt{a+b} + 3\sqrt{a(a+b)} - 2b \\
 + a\sqrt{a} + a \qquad \qquad - \sqrt{a(a+b)} \\
 \hline
 2a\sqrt{a+b} + 2\sqrt{a(a+b)} - 2a - 2b \\
 - 2a\sqrt{a+b} - 2\sqrt{a(a+b)} + 2a + 2b \\
 \hline
 0 \qquad 0 \qquad 0
 \end{array}$$

Finalmente se tutte le quantità radicali da moltiplicarsi, o da dividersi, oltre de' particolari radicali saranno affetti da un radicale comune detto perciò *universale*, allora nell'una e nell'altra operazione toglierassi pria il radicale universale, e fatta indi l'operazione, riporrassi sotto l'universale radicale il prodotto, o pure il quoziente.

$$\text{Così sarà } \sqrt[n]{(a-2\sqrt{a+5}\sqrt[3]{b})} \times \sqrt[n]{(2a+3\sqrt{a-4}\sqrt[3]{b})} = \\ \sqrt[n]{[2a^2 - a\sqrt{a+2a}\sqrt[3]{b} - 6a + 17\sqrt{(a^3b^2)} - 12\sqrt[3]{b^2}]}$$

§ 11. Data la maniera di eseguire sopra i radicali le quattro comuni operazioni, passiamo ora a far vedere come di un radicale assegnar puossi qualsivoglia potenza, o radice.

La riduzione de' radicali a quantità con esponenti frazionari, sarà quella che ci guiderà alla soluzione dell'uno e dell'altro quesito.

Vogliasi innalzare $\sqrt[r]{a}$ alla potenza m .

Essendo $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$, sarà $(\sqrt[r]{a})^m = (a^{\frac{1}{r}})^m$, sia $\frac{1}{r} = n$

sarà $(a^{\frac{1}{r}})^m = (a^n)^m$ perciò (§ 3 l. 2^a) $(a^n)^m = a^{nm} = a^{\frac{m}{r}}$

$$= \sqrt[r]{a^m}, \text{ dunque } (\sqrt[r]{a})^m = \sqrt[r]{a^m}$$

Cioè eleverassi un radicale a potenza coll'innalzare all'indicato grado la grandezza sotto il segno radicale.

Dunque supposto $m=3$, $r=2$ avrassi

$$(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a} \text{ (§ 8 l. 2^a)}$$

Non essendo l'estrazione della radice, che una elevazione a potenza frazionaria, se vorrassi la radice ennesima di $\sqrt[r]{a}$, ossia il valore di $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$, bisognerà moltiplicare $\sqrt[r]{a}$, per la potenza frazionaria $\frac{1}{n}$, dunque avrassi

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{r}}} = a^{\frac{1}{nr}} = \sqrt[nr]{a}$$

Perciò si avrà la radice qualunque di un radicale col moltiplicare l'esponente della radice data per lo esponente della radice che si vuole.

Così supposto $n=4$, $r=5$, avrassi

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[20]{a}; \text{ ed alla fine } \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{qr}}} = \sqrt[20]{a^{qr}} = a$$

§ 12. La esistenza di una potenza suppone necessariamente quella della corrispondente radice: trattasi ora di risolvere il seguente problema.

« Data una potenza ritrovare la corrispondente radice. »

Essendo (§ 8 l. 2^a) la radice di un monomio il quoziente che risulta dividendo l'esponente della quantità per il grado della radice, e per conseguenza conoscendo noi la maniera di estrarre la radice de' monomi, conviene ora mostrare il metodo da tenersi per estrarre la radice delle quantità complesse. Per noi essendo sufficiente il metodo di estrarre la radice quadrata e cubba, ci riconcentreremo solamente in questa ricerca: primieramente trattandosi del quadrato di un binomio $(a+b)^2$, essendo la di lui espressione $a^2 + 2ab + b^2$, rifletterassi, che se dal primo termine

a^2 si estrarrà la radice a , ed indi innalzata a quadrato, e sottrarrassi dal primo termine, il residuo $2ab+b^2$ conterrà il doppio prodotto del primo termine per il secondo, ed il quadrato del secondo. Se or dividerassi codesto residuo per la doppia trovata radice $2a$, il quoziente ci darà il secondo termine b della radice, quale moltiplicato per $2a$, ed elevato a quadrato dovrà intieramente distruggere il suddetto residuo $2ab+b^2$.

Vogliasi la radice quadrata di un trinomio $(a+c+d)^2$ essendo (§ 7 l. 2^a)

$$(a+c+d)^2 = a^2 + 2ac + 2ad + c^2 + 2cd + d^2$$

Se dal primo termine a^2 estrarassi la radice a , ed indi elevata a quadrato, e sottrarrassi dalla data espressione, il residuo $2ac+2ad+c^2+2dc+d^2$ conterrà il doppio prodotto della trovata radice per il secondo termine, il quadrato di esso, il doppio prodotto del primo per il terzo, il doppio prodotto del secondo per il terzo, ed il quadrato del terzo.

Se dunque dividerassi codesto residuo per la doppia trovata radice $2a$, il quoziente ci darà il secondo termine c della cercata radice, quale moltiplicato per $2a$, ed indi elevato a quadrato, ed il tutto sottratto dal suddetto residuo ne darà un secondo $2ad+2cd+d^2$.

Or quest' ultimo conterrà il doppio prodotto della prima radice per il terzo, il doppio prodotto della seconda per il terzo, ed il quadrato del terzo. Se dunque divide-

rassi codesto ultimo residuo per la doppia somma delle due radici, ossia per $2(a+c)$, il quoziente ci darà il terzo termine d della radice, quale moltiplicato per $2a+2c$, ed indi elevato a quadrato, e tutto sottratto poi dall' ultimo residuo, lo farà interamente svanire. Gli stessi ragionamenti ci condurranno a ritrovare della maniera istessa la radice quadrata di un quattrinomio, di un polinomio qualunque. Presentiamone alcuni esempî.

ESEMPIO 1°

« Vogliasi la radice quadrata di $36a^2 + 60ab + 25b^2$. »

$$\begin{array}{r} \text{Ecco il calcolo} \quad 36a^2 + 60ab + 25b^2 \quad \left| \begin{array}{l} 6a + 5b \\ \hline 12a \end{array} \right. \\ \underline{-36a^2} \\ + 60ab + 25b^2 \\ \underline{-60ab - 25b^2} \\ 0 0 \end{array}$$

Dunque $\sqrt{36a^2 + 60ab + 25b^2} = 6a + 5b$.

ESEMPIO 2°

« Vogliasi la radice di $4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$. »

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \quad \left| \begin{array}{l} 2a - 3b + 4c \\ \hline 4a \\ \hline 4a - 6b \end{array} \right. \\ \underline{-4a^2} \\ - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\ + 12ab - 9b^2 \\ \hline + 16ac - 24bc + 16c^2 \\ \underline{- 16ac} + 24bc - 16c^2 \\ 0 0 0 \end{array}$$

Dunque

$$\sqrt[4]{(4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2)} = 2a - 3b + 4c$$

Le successive potenze di una frazione si ottengono della maniera istessa di quelle di una quantità intera.

Difatti (§ 1 l. 1^a)

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

Ed in generale supposto n il numero de' fattori frazionari

$$\text{avrassi } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \text{ Dippiù (§ 3 l. 2^a)}$$

$$\text{si ha } \left(\frac{a^n}{b^n}\right)^m = \frac{a^{nm}}{b^{nm}} = \frac{a^{n \times m}}{b^{n \times m}}, \text{ cioè}$$

Eleverassi ad una potenza una frazione con moltiplicare l'esponente del numeratore, e del denominatore per il grado della chiesta potenza, e ciò ha luogo eziandio per la frazione complessa.

Ripresa l'espressione $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, e supposto $n = \frac{q}{p}$ avrassi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{a^{\frac{q}{p}}}{b^{\frac{q}{p}}}. \text{ Sia ora } p = q, \text{ sarà allora}$$

$$\frac{a^{\frac{q}{q}}}{b^{\frac{q}{q}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{q}} = \sqrt[q]{\frac{a^q}{b^q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^q} = \frac{a}{b}$$

Dunque si ottiene la radice di una frazione dividendo l'esponente del numeratore, e del denominatore per l'esponente della radice, sia pure la frazione complessa.

§ 13. I numeri (§ 11.1°) non rappresentandoci, che dei casi particolari di una generale espressione algebrica, segue, che il quadrato di un binomio, o di un trinomio numerico contener dee le medesime costituenti parti di quelle di un algebrico.

Difatti avrassi $(26)^2 = 26 \times 26 = 676$; dall'altra parte $(26)^2 = (20+6)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 6 + 6^2 = 676$; e così avrà luogo per un trinomio, e per un polinomio qualunque.

Se dunque le parti componenti un quadrato numerico sono le stesse di quelle di un algebrico, ne segue, che l'istesso metodo che avrà luogo per l'estrazione di una radice quadrata algebrica, lo avrà pure per quella numerica; salvo però alcune modificazioni necessarie, attesa la confusione delle cifre numeriche.

Ecco delle applicazioni.

ESEMPIO 1°

« Vogliasi la radice quadrata di 676. » L'istesso, supposto un quadrato perfetto, dee contenere il quadrato del primo numero, il doppio prodotto del primo per il secondo, ed il quadrato del secondo.

Or siccome il quadrato dell'unità non potrà contenere le centinaia, ne segue che questo quadrato dell'unità della

radice cercata non potrà esistere, che nelle prime due cifre; e siccome qualunque numero non è altro, che unità della sua specie, ne segue, che il quadrato di questo numero occuperà le unità, e le decine della sua specie; da ciò ne segue la divisione del numero in membri di due cifre, incominciando da destra a sinistra. Dividerassi perciò il numero proposto 676, in membri di due cifre, ed incomincerassi l'estrazione da sinistra a destra. Or la radice prossima di 6 è 2; ed elevandola a quadrato, e sottratta dalla data quantità avrassi il residuo 276, code-
st'ultimo conterrà il doppio prodotto della radice 2, che sono le decine per la seconda cifra, che saranno le unità, ed il quadrato di quest'ultima; dunque osservando, che il doppio prodotto del primo per il secondo termine, essendo un prodotto di decine per unità, non può cominciare ad esistere, che dalle decine in poi, si dividerà perciò 27 per 4, e fatta la divisione avrassi 6, quale moltiplicato per 4 e sottratto da 27, ci darà, unendovi l'ultima cifra 6, un residuo di 36, quest'ultimo, se il quadrato è perfetto, dovrà solamente contenere il quadrato della radice 6, come difatti verificasi, e perciò $\sqrt{676} = 26$.

ESEMPIO 2°

« Vogliasi la radice di 58081, che sarà un trinomio. »

“

Farassi	5, 80, 81,	radice	241
	4	divisore	4
	180	divisore	48
	176		
	481		
	481		
	0		

Diviso il numero in membri di due cifre, prenderassi la radice prossima di 5, quale sarà 2; il di cui quadrato sottratto da 5, darà il residuo 1, al quale unito 80 avrassi 180, questo conterrà il doppio prodotto del primo numero per il secondo, ed il quadrato del secondo; dunque dividerassi per la doppia radice 4, che unita alla prima sarà 24. Or moltiplicando questa radice per se stessa, e per la doppia radice 4 avrassi 176, che sottratto da 180 ci darà 4, al quale unito 81 si avrà il residuo 481, che conterrà il prodotto di 48 (doppio di 24), ed il quadrato del terzo numero. Dunque dividendo per la doppia radice 48, ci darà la terza radice 1, che unita alla prima e seconda, farà 241; moltiplicando questa ultima radice per se stessa, e per la doppia radice 48 avrassi 481, che sottratto dall'ultimo residuo otterrassi zero, e perciò $\sqrt{(58081)}=241$. Con il medesimo metodo troverassi $\sqrt{(90601)}=301$, e $\sqrt{(123201)}=351$.

§ 14. Data la maniera di estrarre la radice quadrata, restaci ora a dare il modo di estrarre la radice cuba.

a ciò fare prendasi (§ 7 l. 2^a) la formola del binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

dunque da a^3 estratta la radice cuba, ed indi sottratto dalla suddetta espressione il di lei cubo, il residuo $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ conterrà il triplo prodotto del quadrato di a per b , il triplo prodotto di a per il quadrato di b , ed il cubo di b ; perciò se dividerassi per il triplo quadrato di a , avrassi il secondo termine b , che moltiplicato per $3a^2$, ed il di lui quadrato per $3a$, e unitovi il suo cubo, queste quantità sottratte dal residuo $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ lo faranno interamente svanire.

« Vogliasi ora la radice cuba di $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. »

Ecco il calcolo.

$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$	radice	$a + 2b$
$-a^3$	divis. ^a	$3a^2$
$+6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ $-6a^2b - 12ab^2 - 8b^3$ $0 \quad 0 \quad 0$		

Dunque $\sqrt[3]{(a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3)} = a + 2b$

Se ora vorrassi estrarre la radice cuba di un trinomio elevato alla terza potenza, essendo (§ 7^a l. 2^a)

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3$$

Se estrarrassi dal primo termine a^3 la radice, ed indi elevata a cubo e sottrarrassi dalla espressione data, il residuo

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3$ conterrà il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo per il primo, il cubo del secondo, il triplo prodotto del quadrato della somma del primo e secondo per il terzo, il triplo prodotto del quadrato del terzo per la somma de' due primi, ed il cubo del terzo. Dunque dividendo per il triplo quadrato della radice trovata, o sia per $3a^2$, avrassi b , quale elevato a cubbo, e unendovi il prodotto $3a^2b$, e $3b^2a$, ed il tutto sottratto dall'ultimo residuo, avrassi

$$3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3$$

quest'ultimo contenendo il triplo prodotto del quadrato della somma de' due primi termini per il terzo, il triplo prodotto del quadrato del terzo per la somma de' due primi, ed il cubo del terzo termine, seguene che dividendolo per il triplo quadrato de' due primi, avrassi il terzo termine c , quale elevato a cubo, ed unendovi il triplo prodotto del di lui quadrato per la somma de' due primi termini, ed il triplo prodotto del quadrato della somma de' due primi termini per esso, il tutto sottratto dall'ultimo residuo, avrassi zero; perciò

$$\sqrt[3]{[a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3]} = a + b + c.$$

Volendo applicare questa generale teoria ai numeri divideransi a tre, a tre, (per la ragione istessa, che il cubo di una unità non potrà mai contenere più di tre cifre)

incominciando da destra a sinistra, ed indi farassi lo stesso ragionamento.

ESEMPIO 1°

« Vogliasi la $\sqrt[3]{(3375)}$ » Ecco il calcolo

3,375	Radice	15
1	Divisore	3
2375		
15		
875		
75		
125		
125		
0		

ESEMPIO 2°

« Vogliasi la radice cuba di 4096. » Ecco il calcolo.

4,096	Radice	16
1	Divisore	3
3096		
18		
1296		
108		
216		
216		
0		

§ 15. Qualunque quantità radicale potrà esprimersi per $\sqrt[m]{p^n}$, quale nel caso di $p=a$ c'indicherà la radice di un monomio, di $p=a \pm b$ di un binomio, ed alla fine di $p=a \pm b \pm c \pm d \pm \text{ec.}$ di un polinomio. Difatti come si è detto sarà $\sqrt[m]{p^n} = p^{\frac{n}{m}}$. Or può essere $n=m$, $n < m$, $n > m$. nel primo caso essendo $\sqrt[m]{p^n} = \sqrt[m]{p^m} = p^{\frac{m}{m}} = p$, la radice sarà *apparente* e la quantità *razionale*, nel secondo caso essendo $\frac{n}{m}$ un rotto proprio, la quantità sarà *incommensurabile*, o *irrazionale*, ed il radicale proprio. Nel terzo caso poi di $n > m$, se sarà m un divisore esatto di n la quantità sarà commensurabile, in caso contrario avrassi una quantità *irrazionale*, con fattore *razionale*. In effetto essendo $n > m$, potrà suppersi $n = q + m$; dunque avrassi $p^{\frac{n}{m}} = p^{\frac{m+q}{m}} = p^{\frac{m}{m}} \times p^{\frac{q}{m}} = p \sqrt[m]{p^q}$.

Le medesime conseguenze dedurransi supposta p una quantità frazionaria.

Da tuttociò conchiuderassi che la quantità irrazionale avrà sempre un esponente frazionario *proprio*, e la razionale un esponente frazionario *apparente*. Dippiù siccome l'estrazione della radice fassi con dividere l'esponente della quantità per quello della radice vale a dire con dividere n per m , divisione che non può sempre esattamente effettuarsi, così dunque gli analisti han procurato di ottenere

il valore prossimo de' radicali propri, giacchè il vero riesce impossibile di averlo.

Or codesta approssimazione sarà tanto più esatta quanto più accosterassi al vero valore, per far ciò bisogna ridurre il dato radicale in serie cioè in una formola composta di infiniti termini i quali vanno sempre aumentando, o diminuendo, nel caso di aumento la serie dirassi *divergente*, *convergente* nel caso contrario.

Se dunque una serie continuata all' infinito potrebbe sola darci il vero valore del radicale, ne segue che quanti più termini si prenderanno tanto più avvicineravvisi. Or la formola del binomio elevato a potenza frazionaria potrà a tale uopo servirci.

Difatti essendo (§ 5 l. 2^a)

$$(a+b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} + \frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} b + \frac{h(h-k)}{k \cdot 2k} a^{\frac{h-2k}{k}} b^2 + \frac{h(h-k)(h-2k)}{k \cdot 2k \cdot 3k} a^{\frac{h-3k}{k}} b^3 + \text{cc.}$$

una serie che va all' infinito per essere $\frac{h}{k}$ una frazione;

ma $a^{\frac{h}{k}} = \sqrt[k]{a^h}$, $a^{\frac{h-k}{k}} = \sqrt[k]{a^{h-k}}$; e così del resto: or per far svanire codesti radicali bisognerà prendere per a un numero tale che sia elevato alla potenza k ; difatti supposto $a=c^k$ e fatte le solite sostituzioni, e le riduzioni avrassi

$$(c^k + b)^{\frac{h}{k}} = c^h + \frac{h}{k} c^{h-k} b + \frac{h(h-k)}{k \cdot 2k} c^{h-2k} b^2 \\ + \frac{h(h-k)(h-2k)}{k \cdot 2k \cdot 3k} c^{h-3k} b^3 + \text{ec.}$$

Dunque ogni qualvolta di una quantità vorrassi estrarre la radice, bisognerà dividerla in due parti, una delle quali sia una potenza dell'esponente k , ed indi far uso della precedente serie.

§ 16. Dall'essere infinito il numero de' termini di una serie, che risulta dallo sviluppo di una quantità elevata a frazionaria potenza, dovrà naturalmene dedursene, che il metodo approssimativo di estrarre la radice dovrà poggiare su lo sviluppo di una serie, che decrescendo sempre ne' suoi termini successivi, potranno gli ultimi trascurarsi, a fronte de' primi, e perciò su quella di una serie *convergente*. Ciò

posto riprendiamo la superiore serie $(c^k + b)^{\frac{h}{k}} = \text{ec.} (\S \text{ ant.})$.
Or (§ 9° l. 1°)

$$c^{h-k} b = \frac{c^h b}{c^k}, c^{h-2k} b^2 = \frac{c^h b^2}{c^{2k}}, c^{h-3k} b^3 = \frac{c^h b^3}{c^{3k}},$$

e così ec. Dunque sostituendo questi valori nella formola superiore ridurrassi

$$(c^k + b)^{\frac{h}{k}} = c^h + \frac{h}{k} \frac{c^h b}{c^k} + \frac{h(h-k)}{k \cdot 2k} \frac{c^h b^2}{c^{2k}} \\ + \frac{h(h-k)(h-2k)}{k \cdot 2k \cdot 3k} \frac{c^h b^3}{c^{3k}} + \text{ec.}$$

Esaminando quest'ultima vedrassi facilmente che i termini di essa crescono crescendo b , e diminuiscono crescendo c ; dunque per rendere la già trovata serie convergente, e perciò atta per l'approssimato valore del radicale, bisognerà nell'applicazione prendere $c > b$.

Sia ora in essa formola $k=2$, $h=1$; dunque fatte le necessarie sostituzioni avrassi

$$\sqrt{c^2 + b} = c + \frac{b}{2c} - \frac{b^2}{8c^3} + \frac{3b^3}{48c^5} - \text{ec.}$$

E fatto $h=1$ $k=3$ si avrà

$$\sqrt[3]{c^3 + b} = c + \frac{b}{3c^2} - \frac{2b^2}{18c^5} + \frac{10b^3}{162c^8} - \text{ec.}$$

La prima esprimerà lo sviluppo di una radice quadrata; la seconda di un radicale cubo.

ESEMPIO I°

« Vogliasi trovare prossimamente la radice quadrata di 2. »

Il quadrato prossimamente inferiore al numero dato è l'unità; onde convien fare $c=1$, $b=1$. Or sostituendo costesti valori nella formola $\sqrt{c^2 + b} = \text{ec.}$ avrassi

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1 \cdot 3}{48} - \text{ec.}$$

T. I.

serie non molto convergente per non essere nel nostro caso $c > b$, e per conseguenza non propria, se non con un numero infinito di termini, a darci il valore di $\sqrt[3]{2}$. Ma $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{200}{100}} = \sqrt[3]{\frac{50}{25}} = \sqrt[3]{\frac{49+1}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{(7^2+1)}$; dunque in questo caso essendo $7 > 1$, potrà farsi $c=7$, $b=1$, e sostituendo codesti valori avrassi

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= \frac{1}{5} \sqrt[3]{7^2+1} = \frac{1}{5} \left(7 + \frac{1}{14} - \frac{1}{8 \cdot 7^3} + \frac{3}{48 \cdot 7^5} - \text{ec.} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(7 + \frac{1}{14} - \frac{1}{2744} + \frac{3}{806736} - \text{ec.} \right)\end{aligned}$$

serie convergentissima dalla quale presi i soli quattro termini, e trascurati gli altri, avrassi

$$\sqrt[3]{2} = \frac{580299}{268912} = 1,414213; \text{ la quale non differisce dal vero valore neppur di un milionesimo.}$$

ESEMPIO 2°

« Vogliasi per approssimazione la $\sqrt[3]{126}$. »

La radice cuba prossima di 126 è 5, dunque sarà $\sqrt[3]{126} = \sqrt[3]{(5^3+1)}$, perciò $c=5$, $b=1$, e sostituendo codesti valori nella trovata serie $\sqrt[3]{(c^3+b)} = \text{ec.}$ avrassi la convergentissima

$$\sqrt[3]{126} = 5 + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{2}{18 \cdot 5^5} + \frac{10}{162 \cdot 5^8} - \text{ec.}$$

Quantità immaginarie.

§ 17. La nozione delle quantità *immaginarie* deducesi dalla teoria de' radicali.

Per quantità immaginaria intendosi quella, che ripugna alla di lei stessa esistenza; niente di meno l'analisi considera, ed insegna ad operare sulle quantità immaginarie, sì perchè qualche volta dall'unione di più immaginarie ne nascono quantità reali; sì perchè il valore immaginario di una quantità mostraci l'impossibilità della soluzione di un quesito.

Supposto $p=a$ (l. 2^a § 15) qualunque quantità radicale potrà esprimersi per $\sqrt[m]{a^n}$. Sia ora $m=n=2r$, ed a negativa; allora avrassi $\sqrt[2r]{-a^{2r}}$, *espressione immaginaria*. Dappoichè $(-a)^{2r}=(-a^2)^r$. Ma $(-a)^2=a^2$, dunque $(-a)^{2r}=(a^2)^r=a^{2r}$; dunque $-a$ elevata alla potenza *pari* $2r$ non potrà mai esser negativa, ed a più forte ragione non potrà esserla $+a$; dunque $\sqrt[2r]{-a^{2r}}$ sarà una *quantità immaginaria*.

Sia ora nella superiore espressione $m=n=2r+1$, ed a negativa, avrassi

$$\sqrt[2r+1]{-a^{2r+1}}. \text{ Or } (-a)^{2r+1} = -a(a)^{2r} = -a(a^{2r}) = -a^{2r+1}.$$

Dunque una quantità negativa elevata ad una potenza impari sarà negativa, e perciò non immaginaria.

Ed al contrario qualunque quantità elevata ad una potenza pari, essendo negativa sarà immaginaria.

Or essendo $\sqrt[2r]{-a^{2r}} = \sqrt[2r]{(a^{2r} \times -1)} = a\sqrt[2r]{-1}$, segue, che ogni quantità immaginaria potrà esprimersi per $a\sqrt[2r]{-1}$; dunque fatto $r=1$, ogni quantità immaginaria esprimerassi per $a\sqrt{-1}$. Dalla definizione premessa della immaginaria deducesi, che se ad una quantità immaginaria si aggiugne o si sottrae una quantità reale, o si moltiplica o divide per questa, il risultato dovrà riputarsi immaginario. Così $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, $a+bc\sqrt{-1}$, $\frac{a-b\sqrt{-1}}{c}$, saranno *immaginarie quantità*.

§ 18. Le quantità immaginarie possono sommarsi, sottrarsi, moltiplicarsi, e dividersi; bisogna dunque per tutti questi casi presentare le necessarie regole. La somma e sottrazione delle quantità immaginarie non presentaci alcuna differenza da essere marcata; difatti sarà cosa evidente, che dovendo sommarsi o sottrarsi le immaginarie $a\sqrt{-1}$, e $b\sqrt{-1}$, nel primo caso avrassi $a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a+b)\sqrt{-1}$, e nel secondo $a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = (a-b)\sqrt{-1}$. La moltiplicazione però ci presenta due casi: 1° *che un fattore sia reale, e l'altro immaginario*; 2° *che tutti e due i fattori siano immaginari*.

Sia dunque per il 1° caso a da moltiplicarsi per $b\sqrt{-1}$, avrassi $a \times b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1}$ quantità immaginaria.

Dunque il prodotto di una grandezza reale per una immaginaria è sempre immaginario.

L'espressione poi $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1}$ ci esprime il secondo caso.

Or $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. Ma (1.2° § 11)

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -(1^{\frac{1}{2}} \times 1^{\frac{1}{2}}) = -1$. Dunque avrassi
 $a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = -ab$. Se invece si avrebbe

$$-a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -ab$$

Del pari sarà

$$a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} = -ab\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -ab \times -1 = ab.$$

Cioè il prodotto di due quantità immaginarie sarà reale, e positivo se affette dal segno contrario, negativo se collo stesso segno.

§ 19. La divisione poi ci presenta tre casi: 1° che il dividendo sia reale, ed il divisore immaginario; 2° che il dividendo sia immaginario, ed il divisore reale; 3° che il dividendo, ed il divisore sieno immaginari.

Per il 1° essendo

$$\frac{ab}{a\sqrt{-1}} = \frac{b}{\sqrt{-1}} = \frac{b\sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}} = \frac{b\sqrt{-1}}{-1} = -b\sqrt{-1}.$$

Ed egualmente avendosi

$$\frac{-ab}{-a\sqrt{-1}} = \frac{b\sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}} = -b\sqrt{-1}$$

$$\text{e } \frac{-ab}{a\sqrt{-1}} = \frac{-b\sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}} = \frac{-b\sqrt{-1}}{-1} = b\sqrt{-1}, \text{ se ne deduce:}$$

Che il quoziente di una quantità reale per una immaginaria sarà immaginario, positivo se i due fattori saranno con segni contrarii, negativo se con gli stessi segni.

Il 2° caso sarà rappresentato per $\frac{ab\sqrt{-1}}{a} = b\sqrt{-1}$, e si avrà pure $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-a} = b\sqrt{-1}$; parimente $\frac{-ab\sqrt{-1}}{a} = -b\sqrt{-1}$, e si deduce:

Che il quoziente di una immaginaria per una reale sarà immaginario.

Il 3° caso sarà espresso per $\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = a$, come pure per $\frac{-ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}} = a$, ed in fine $\frac{ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}} = -\frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -a$, e perciò deducesi:

Che il quoziente tra due quantità immaginarie sarà reale. Negli ultimi due casi i segni seguono le stesse regole che per le quattro reali.

Sia ora $M = m + n\sqrt{-1}$ $P = p + q\sqrt{-1}$, ed abbiasi

$$\frac{M}{P} = \frac{m + n\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}}. \text{ In tal caso avrassi}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} &= \frac{(m + n\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1})}{(p + q\sqrt{-1})(p - q\sqrt{-1})} = \frac{(mp + nq) + (np - mq)\sqrt{-1}}{p^2 - pq\sqrt{-1} + pq\sqrt{-1} + q^2} \\ &= \frac{mp + nq}{p^2 + q^2} + \frac{(np - mq)\sqrt{-1}}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

Or in essa $\frac{m+n\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}} = \frac{(mp+nq)}{p^2+q^2} + \frac{(np-qm)\sqrt{-1}}{p^2+q^2}$

facciasi $n=0$, ed allora avrassi

$$\frac{M'}{P'} = \frac{m}{p+q\sqrt{-1}} = \frac{mp-mq\sqrt{-1}}{p^2+q^2}$$

Perciò ne segue, che una frazione della forma
 $\frac{m}{p+q\sqrt{-1}}$
avente l'immaginario nel denominatore, può sempre ridursi ad un'altra, nella quale l'immaginario esiste nel numeratore, ed il denominatore è reale.

§ 20. Data la maniera di moltiplicare e dividere le immaginarie monomie, non essendo le complesse che un tutte di monomie, le stesse regole dedotte per le prime avranno luogo per le seconde: per applicarle presentiamo alcuni esempj.

ESEMPIO 1°

α Vogliasi il prodotto di $(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})$.

Facendo al solito la moltiplica avrassi

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ \hline 1+\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1}+1 \end{array} \} = 1+1=2$$

ESEMPIO 2°

$$(2m+3n\sqrt{-1})(2m-3n\sqrt{-1}) = 4m^2 + 6mn\sqrt{-1} - 6mn\sqrt{-1} + 9n^2 = 4m^2 + 9n^2$$

ESEMPIO 3°

« Vogliasi il quoziente di $4m^2 + 9n^2$ per $2m - 3n\sqrt{-1}$. »

Ecco il calcolo

$$\begin{array}{r|l}
 4m^2 + 9n^2 & \text{divisore} \quad | \quad 2m - 3n\sqrt{-1} \\
 -4m^2 + 6mn\sqrt{-1} & \text{quoziente} \quad | \quad 2m + 3n\sqrt{-1} \\
 \hline
 +6mn\sqrt{-1} + 9n^2 & \\
 -6mn\sqrt{-1} - 9n^2 & \\
 \hline
 0 & 0
 \end{array}$$

ESEMPIO 4°

« Vogliasi il valore

$$\frac{24a^2 + 10ab\sqrt{-1} + 24ac\sqrt{-1} + 6b^2 - 5bc - 6c^2}{4a + 3b\sqrt{-1} + 2c\sqrt{-1}}$$

Ecco il calcolo.

$$\begin{array}{r|l}
 24a^2 + 10ab\sqrt{-1} + 24ac\sqrt{-1} + 6b^2 - 5bc - 6c^2 \text{ div. } & 4a + 3b\sqrt{-1} + 2c\sqrt{-1} \\
 -24a^2 - 18ab\sqrt{-1} - 12ac\sqrt{-1} & \text{quoz.} \quad | \quad 6a - 2b\sqrt{-1} + 3c\sqrt{-1} \\
 \hline
 -8ab\sqrt{-1} + 12ac\sqrt{-1} + 6b^2 - 5bc - 6c^2 & \\
 +8ab\sqrt{-1} & -6b^2 - 4bc \\
 \hline
 12ac\sqrt{-1} - 9bc - 6c^2 & \\
 -12ac\sqrt{-1} + 9bc + 6c^2 & \\
 \hline
 0 & 0 \quad 0
 \end{array}$$

§ 21. Per completare la teoria delle quantità immaginarie, restaci di esse dedurre le successive potenze.

Ecco il quadro analitico delle loro differenti potenze.

$$(\S 11. 2^a) (a\sqrt{-1})^2 = (a\sqrt{-1})(a\sqrt{-1}) = a^2 \times -1 = -a^2.$$

Dunque

$$(a\sqrt{-1})^3 = -a^2 \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = -a^3 \sqrt{-1}$$

$$(a\sqrt{-1})^4 = -a^3 \sqrt{-1} \times a\sqrt{-1} \dots \dots = a^4$$

$$(a\sqrt{-1})^5 = a^4 \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = a^5 \sqrt{-1}$$

$$(a\sqrt{-1})^6 = a^5 \sqrt{-1} \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = -a^6$$

$$(a\sqrt{-1})^7 = -a^6 \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = -a^7 \sqrt{-1}$$

$$(a\sqrt{-1})^8 = -a^7 \sqrt{-1} \times a\sqrt{-1} \dots \dots = a^8$$

$$(a\sqrt{-1})^9 = a^8 \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = a^9 \sqrt{-1}$$

$$(a\sqrt{-1})^{10} = a^9 \sqrt{-1} \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = -a^{10}$$

$$(a\sqrt{-1})^{11} = -a^{10} \times a\sqrt{-1} \dots \dots \dots = -a^{11} \sqrt{-1}$$

$$(a\sqrt{-1})^{12} = -a^{11} \sqrt{-1} \times a\sqrt{-1} \dots \dots = a^{12}$$

ec.

ec.

ec.

Or da questa tavola puossi conchiudere, che tutte le immaginarie avranno le potenze pari *reali*, e le impari al contrario *immaginarie*. Inoltre la potenza seconda dell'immaginaria è reale, ma negativa, e la metà dell'esponente di essa non è divisibile per 2. La potenza quarta è reale e positiva, e la metà dell'esponente divisibile per due; ed analizzando le successive potenze dedurrassi:

Che le potenze pari delle quantità immaginarie saranno reali, e positive se la metà del loro esponente sarà divisibile per due; reali, ma negative nel caso contrario.

Se dunque sarà m pari la formola generale
 $(a\sqrt{-1})^{2m} = a^{2m}$, ci esprimerà la potenza reale e po-
 sitiva della immaginaria, e nella medesima ipotesi di m
 pari $(a\sqrt{-1})^{2(m-1)}$ ci rappresenterà della immaginaria
 la potenza reale, ma negativa.

Esaminando le potenze impari vedrassi che le stesse sa-
 ranno immaginarie positive tutte le volte sottratta l'unità
 dall'esponente della potenza, sarà la differenza divisibile
 per 4; nel caso contrario saranno immaginarie negative.
 Or essendo $2m+1$ la generale espressione di una potenza
 impari supposto m pari, sarà sempre $2m+1-1$ divisibile
 per 4; dunque la formola generale di esse potenze potrà
 esprimersi per $(a\sqrt{-1})^{2m+1} = \pm a^{2m+1} \sqrt{-1}$ col segno
 superiore se sarà m pari, coll'inferiore se sarà impari.

§ 22. Conosciuta la maniera di elevare alle rispettive
 potenze le monomie immaginarie sarà facile il discendere a
 quella di ritrovare le potenze delle quantità complesse
 immaginarie.

In effetto (l. 2^a § 4) il binomio Newtoniano essendo
 anche proprio per darci lo sviluppo delle successive po-
 tenze di un polinomio, l'applicheremo a darci le succes-
 sive potenze di una quantità immaginaria complessa. Di-
 fatti volendo elevare all' n esima potenza il binomio
 $(a+b\sqrt{-1})$ fatto $b\sqrt{-1}=c$, sarà (l. 2^a § 4)

$$(a+c)^m = a^m + m a^{m-1} c + m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} c^2 \\ + m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} c^3 + \text{ec.}$$

Ma (§ pr.^o) essendo $c = b\sqrt{-1}$, sarà $c^2 = -b^2$, $c^3 = -b^3\sqrt{-1}$, dunque avrassi

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + m a^{m-1} b\sqrt{-1} - m \left(\frac{m-1}{2}\right) a^{m-2} b^2 \\ - m \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \text{ec.}$$

Sia ora $m=2$ si avrà $(a+b\sqrt{-1})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2$, così pure troverassi lo sviluppo di $(a+b\sqrt{-1})^3$ di $(a+b\sqrt{-1})^4$, e così ec.

E facendo le medesime sostituzioni della l. 2.^a § 6 avrassi lo sviluppo di $(a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1})^m$.

Finalmente ricapitolando tuttocchè che si è osservato, si scorderà facilmente, che riunendo da una parte tutte le quantità reali, e dall'altra le immaginarie, potrassi con il Sig.^r d'Alembert conchiudere:

Che generalmente qualunque quantità immaginaria si potrà ridurre alla forma di $A+B\sqrt{-1}$ dove A e B saranno delle quantità reali.

Difatti la somma e la sottrazione di $a+b\sqrt{-1}$ con $c+d\sqrt{-1}$ sarà espressa per $a \pm c \pm b\sqrt{-1} \pm d\sqrt{-1}$, e fatto $a \pm c = A$, e $b \pm d = B$, la somma e la sottrazione delle quantità immaginarie ci verrà espressa per $A+B\sqrt{-1}$,

dove A e B sono quantità reali; il prodotto di $a+b\sqrt{-1}$ per $c+d\sqrt{-1}$ è eguale ad $ac+ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}-bd$, perciò fatto $ac-bd=A$, $ad+bc=B$, avrassi

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}$$

Per la divisione di $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$, si avrà

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} &= \frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})} = \frac{ac-ad\sqrt{-1}+bd+bc\sqrt{-1}}{c^2-cd\sqrt{-1}+cd\sqrt{-1}+d^2} \\ &= \frac{ac+bd+bc\sqrt{-1}-ad\sqrt{-1}}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

$$\text{Or fatto } \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = A, \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2} = B$$

$$\text{si avrà } \frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}} = A+B\sqrt{-1}$$

Finalmente essendo (§ prec.)

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{-1})^n &= a^n + na^{n-1}b\sqrt{-1} - n\frac{(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 - n\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3\sqrt{-1} \pm \text{ec.} \\ &= a^{n-n}\frac{(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 \pm \text{ec.} + \sqrt{-1} \left(na^{n-1}b - n\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 \pm \text{ec.} \right)\end{aligned}$$

Se farassi

$$a^{n-n}\frac{(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 \pm \text{ec.} = A, na^{n-1}b - n\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 \pm \text{ec.} = B$$

avrassi allora $(a+b\sqrt{-1})^n = A+B\sqrt{-1}$.

Se poi in questa formola supporremo $n = \frac{h}{k}$, potrà farsi lo stesso ragionamento; poichè sarà

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} + \frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} b\sqrt{-1} - \frac{h}{k} \left(\frac{h-k}{2k} \right) a^{\frac{h-2k}{k}} b^2 - \dots \pm \text{ec.}$$

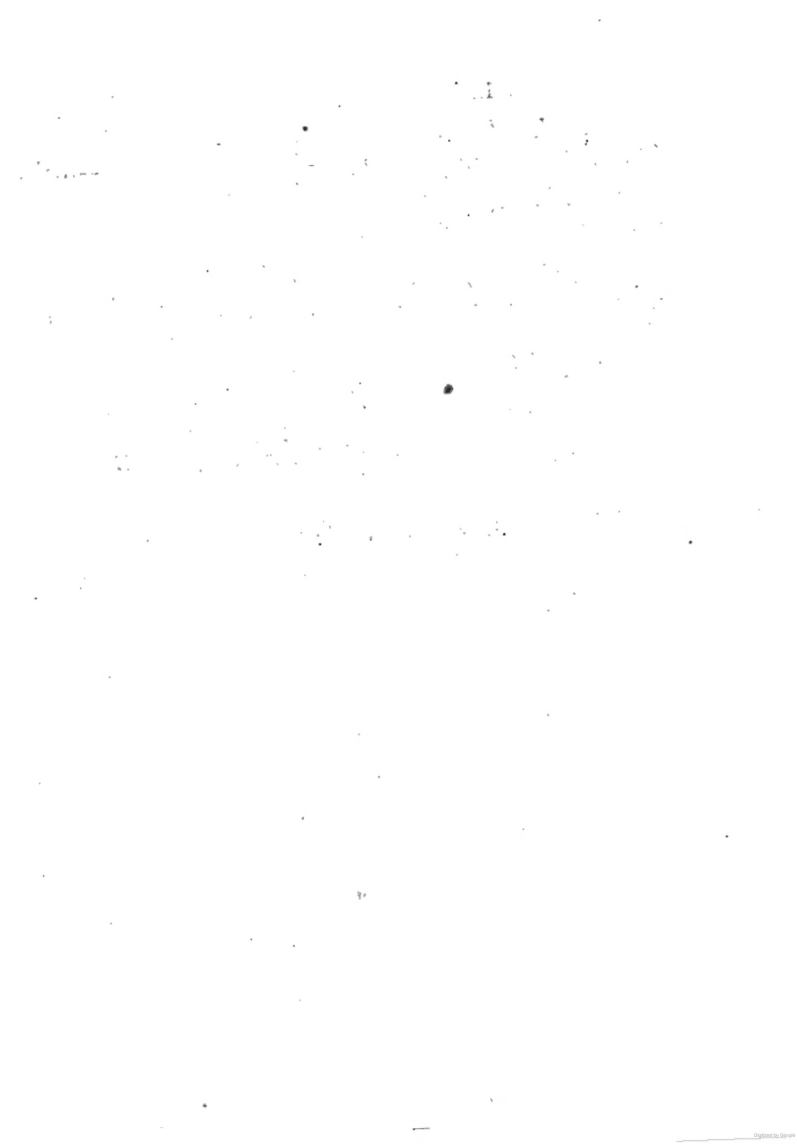
$$= a^{\frac{h}{k}} - \frac{h}{k} \frac{(h-k)}{2k} a^{\frac{h-2k}{k}} b^2 + \dots \pm \text{ec.}$$

$$+ \left(\frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} b - \frac{h}{k} \frac{(h-k)}{2k} \frac{(h-2k)}{3k} a^{\frac{h-3k}{k}} b^3 + \dots \pm \text{ec.} \right) \sqrt{-1}$$

$$\text{e fatto } a^{\frac{h}{k}} - \frac{h}{k} \frac{(h-k)}{2k} a^{\frac{h-2k}{k}} b^2 + \text{ec.} = A$$

$$\frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} b - \frac{h}{k} \frac{(h-k)}{2k} \frac{(h-2k)}{3k} a^{\frac{h-3k}{k}} b^3 + \text{ec.} = B,$$

$$\text{avrassi } (a+b\sqrt{-1})^{\frac{h}{k}} = A + B\sqrt{-1}.$$



LEZIONE TERZA

Delle equazioni di primo e secondo grado, e delle equazioni indeterminate di primo grado.

§ 1. Per equazione intendosi quell'analitica espressione marcante l'eguaglianza tra due quantità. Dunque ogni equazione dee contenere due parti dette *membri*; uno che precede il segno di eguaglianza; e l'altro che lo segue. Così se la somma del trinomio $a+b+c$ è eguale a quella di $m+n+r$, questa eguaglianza esprimerassi per la equazione $a+b+c=m+n+r$, il trinomio $a+b+c$ sarà il *primo membro*, ed $m+n+r$ il *secondo*.

Or se, mantenendo sempre l'istessa eguaglianza, farassi in modo da rimanere nel primo membro o la sola a , o b , o c , allora avrassi in particolare nel secondo membro il valore o di a , o di b , o di c .

Ogni ricerca analitica è sempre diretta a risalire dalle quantità date alla conoscenza di quella che cercasi, le prime appellansi quantità *note*, la seconda, ossia la cercata *ignota*, o *incognita*.

Per convenzione generale si esprimono le date colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c , ec. le cercate o incognite coll'ultime x, y, z ; ciò posto la *risoluzione* di una equazione generalmente consistendo nel rinvenimento del

valore dell' incognita, con lasciarla isolata in un membrò, senza però alterare l' eguaglianza, ne segue, che le regole per ciò ottenere dovranno variare a seconda delle varie combinazioni, che l' *incognita* avrà colle *note*, e della particolare natura della prima. Or una incognita può essere elevata a *quadrato*, a *cubo* ec.: una equazione sarà del primo grado se l' incognita avrà per esponente l' unità, di *secondo* grado se avrà il 2 per esponente, di *terzo* quando il 3, ed in fine di *ennesimo grado* se avrà *n* per esponente. Il grado dunque di una equazione ci viene marcato dal massimo esponente dell' incognita; noi per ora parleremo di quelle di *primo grado*.

Una quantità incognita può esser combinata colle note, o per addizione e per sottrazione, o per moltiplica e divisione; bisogna dunque presentare le necessarie regole per tutti i quattro casi isolatamente, o simultaneamente combinandosi. Perciò in generale una equazione di primo grado ad una incognita potrà esprimersi per $Lx \pm m = \pm r$, in cui ciascuna delle quantità L, m, r , sia cognita positiva o negativa, intera o frazionaria, monomia o polinomia.

§ 2. Abbiassi l' equazione $x \pm b \pm c = m + n + r$; trattasi ora (salvo l' eguaglianza tra i due membri) di eliminare dal primo $b \pm c$, per così restare la sola x ; per ciò fare (-nel caso de' segni positivi) sottrarrassi da' due membri l' istessa quantità $b + c$, ed avrassi l' eguaglianza istessa, perciò $x + b + c - b - c = m + n + r - b - c$, e fatta la riduzione,

sarà $x=m+n+r-b-c$; ed ecco così ricavato il valore della incognita x . Se poi sarà $x-b-c=m+n+r$, allora unendo a' due membri l'istessa quantità $b+c$, avrassi sempre la medesima eguaglianza, e perciò

$$x-b-c+b+c=m+n+r+b+c, \text{ ossia } x=m+n+r+b+c$$

Dunque puossi, senza alterare l'equazione, far passare un termine da un membro in un altro con solamente cambiargli il segno.

Sia ora l'equazione $qx+b+c=m+n+r$, ossia $qx=m+n+r-b-c$; per ottenere il valore dell'incognita x bisognerà liberarla dal fattore cognito q ; per ciò eseguire rifletterassi, che dividendo per l'istessa quantità i due membri, l'eguaglianza non verrà alterata. Dunque

$$\frac{qx}{q} = \frac{m+n+r-b-c}{q}, \text{ ossia } x = \frac{m+n+r-b-c}{q}$$

valore cercato.

Dunque si libera una incognita dal di lei fattore con dividere il secondo membro della equazione per il fattore della incognita.

Sia in fine $\frac{qx}{p}+b+c=m+n+r$, ossia $\frac{x}{p} = \frac{m+n+r-b-c}{q}$; per ottenere il valore della incognita x bisognerà liberarla dal suo divisore p ; per ciò fare rifletterassi, che moltiplicando per l'istessa quantità due eguali, rimane sempre la medesima eguaglianza; perciò avrassi $\frac{px}{p} = p \left(\frac{m+n+r-b-c}{q} \right)$ o sia $x = p \left(\frac{m+n+r-b-c}{q} \right)$ valore richiesto.

Dunque si libera una incognita dal suo divisore, con moltiplicare il secondo membro della equazione per il divisore medesimo.

Con queste sole regole potransi risolvere le equazioni tutte del primo grado ad una incognita, e la formola generale $\frac{qx}{p} \pm b \pm c = m + n + r$ ci rappresenterà le combinazioni tutte di una equazione di primo grado ad una incognita. Ecco degli esempi.

ESEMPIO 1°

» Vogliasi deteggere il valore di x dalla equazione $\frac{4x}{6} - b + 2a = \frac{2x}{8} + r - q'.$ »

Trasportando la x in un solo membro, riducendo allo stesso denominatore, e verificando la riduzione avrassi $\frac{5x}{12} = r + b - q' - 2a$. Perciò consultata la formola generale suddetta, sarà nel nostro caso $q=5$, $p=12$, dunque avrassi $x = 12 \frac{(r+b-q'-2a)}{5}.$

ESEMPIO 2°

« Vogliasi il valore di x in $8x + \frac{b}{a} + c = \frac{rx}{m} + \frac{4b}{3n}.$

Trasportando la x in un solo membro, e riducendo tanto il primo che il secondo membro allo stesso denominatore, avrassi $\left(\frac{8m-r}{m}\right)x = \frac{4ab-3bn-3acn}{3na}$; perciò ripresa la formola generale, sarà $8m-r=q$, $p=m$, perciò $x = m \left(\frac{4ab-3bn-3acn}{3na(8m-r)} \right).$

§ 3. Abbiamo fin qui considerata una equazione di pri-

mo grado, in cui l'incognita non era che una; potendosi dare il caso di esser le incognite in maggior numero, vediamo le conseguenze che ne nascono, e la maniera di determinarle.

Ripresa la formola generale (§ prec.) sia b una seconda incognita, che denoteremo per y , sarà allora

$$\frac{qx}{p} \pm y \pm c = m \pm n \pm r, \text{ e perciò } x = \left(\frac{m \pm n \pm r \mp y \mp c}{q} \right) p.$$

Or in questa equazione il valore di x dipende da quello delle quantità note m, n, r, c, p, q , e da quello della incognita y ; dunque x rimarrà sempre incognita finchè una seconda equazione non ci dia il valore di y ; perciò allorchè si avrà una sola equazione, e più di una incognita, non sarà quella risolubile, e propria a determinare l'incognita, perciò appellasi *equazione indeterminata*.

In generale saranno equazioni determinate quelle in cui il loro numero è eguale a quello delle incognite, ed equazioni indeterminate quelle in cui il numero delle incognite supera quello delle equazioni.

Se dunque vorrassi determinare il valore di due incognite, allora vi abbisogneranno due equazioni. Siano queste

$$(1^a) Ax + By = C; \quad (2^a) A'x + B'y = C'$$

supposte A, B, C, A', B', C' quantità note sotto una combinazione qualunque; dalla (1^a) equazione (§ prec.) avrassi

$$y = \frac{C - Ax}{B}, \text{ e dalla } (2^a) y = \frac{C' - A'x}{B'}; \text{ dunque sarà}$$

$$\frac{C-Ax}{B} = \frac{C'-A'x}{B'}, \text{ o sia (§ prec.) } B'C - AB'x = C'B - A'Bx,$$

e perciò $x = \frac{B'C - C'B}{AB' - A'B}$. Dunque sostituendo in una delle due equazioni esprimenti y il valore trovato di x , avrassi y espresso in quantità cognite. Difatti

$$y = \frac{C}{B} - \frac{Ax}{B} = \frac{C}{B} - \frac{-AB'C + ABC'}{B(AB' - A'B)} = \frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}$$

Dunque avendo due incognite, e per conseguenza due equazioni, si ricaverà in ambedue il valore della stessa incognita, ed eliminerassi in una terza equazione; in questa si determinerà il valore dell'altra, quale sostituendolo in quello della prima, saranno determinate le due incognite in quantità note.

Il metodo di eliminazione esposto ha per risultato la terza equazione $B'C - AB'x = BC' - A'Bx$, colla quale resta eliminato y . Or questa equazione potrassi ottenere moltiplicando la prima $By = C - Ax$ per B' coefficiente di y nella seconda, e moltiplicando la seconda $B'y = C' - A'x$, per B coefficiente di y nella prima, ed indi sottraendo dalla prima la seconda. Difatti avrassi $B'C - AB'x - BC' + A'Bx = 0$, e perciò $x(AB' - A'B) = B'C - BC'$, ed $x = \frac{B'C - BC'}{AB' - A'B}$.

Volendo poi eliminare x , e dedurre direttamente il valore di y , essendo $Ax = C - By$, ed $A'x = C' - B'y$, moltiplicando la prima per A' , e la seconda per A , ed indi sottratta dalla prima la seconda, avrassi

$$A'C - A'By - AC + AB'y = 0, \text{ e perciò } y = \frac{AC - A'C}{AB' - A'B}$$

Dunque semplificherassi l'eliminazione di una incognita tra due equazioni moltiplicando la prima per il coefficiente dell'incognita nella seconda; e la seconda per quello dell'istessa incognita nella prima, ed indi dalla equazione prima sottraendo, o sommando la seconda.

Ecco degli esempi ad una, ed a due incognite.

ESEMPIO 1°

« Vogliasi il valore di x dalla equazione $4x + 2x = 40 + x$. »

$$\text{Avrassi } 5x = 40, \text{ ossia } x = \frac{40}{5} = 8.$$

ESEMPIO 2°

« Cercasi il valore di x da $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} = 30 + x$. »

$$\text{Sarà } \frac{4x + 2x}{8} = 30, \text{ ed } x = \frac{30 \times 8}{6} = 40.$$

ESEMPIO 3°

« Vogliasi i valori di x ed y , nelle due equazioni, (1°) $(4x + 3y = 46)$, (2°) $(5x - 4y = 42)$. »

Dunque avrassi $3y = 46 - 4x$, $4y = 5x - 42$. Moltiplicando la prima per 4, e la seconda per 3; e sottraendo dalla prima la seconda, e riducendo avrassi

$$184 - 16x - 15x + 126 = 0$$

perciò $31x = 310$, dunque $x = 10$, ritrovato il valore di x troverassi subito quello di y , per l'equazione

$$(1^a) 5y = 46 - 4x = 46 - 40 = 6; \text{ perciò } y = \frac{6}{5} = 2.$$

ESEMPIO 4°

« Cercansi i valori di x , ed y , nelle due equazioni

$$(1^a) (ey - fx = af + be), (2^a) (gx - hy = ch + dg). »$$

Dalla prima avrassi $y = \frac{af + be + fx}{e}$, e dalla seconda $y = \frac{gx - ch - dg}{h}$; dunque sarà $\frac{af + be + fx}{e} = \frac{gx - ch - dg}{h}$

e facendo svanire i divisori avrassi

$$afh + beh + fhx = egx - ech - edg$$

quindi $x = \frac{afh + beh + ech + edg}{eg - fh}$

sostituendo adesso questo valore di x nella equazione

$$y = \frac{af + be + fx}{e}, \text{ avremo}$$

$$ey = af + be + f \frac{(afh + beh + ech + edg)}{eg - fh}, \text{ e riducendo allo}$$

stesso denominatore, e fatta la riduzione avrassi

$$y = \frac{aefg + be^2g + cefh + defg}{e(eg - fh)} = \frac{afg + beg + cfh + dfg}{eg - fh}.$$

§ 4. Se saranno tre le incognite da determinarsi, e per conseguenza tre le equazioni da risolversi faransi presso a poco gli stessi ragionamenti.

Difatti siano date le tre equazioni

$$(1^a) Ax + By + Cz = D$$

$$(2^a) A'x + B'y + C'z = D'$$

$$(3^a) A''x + B''y + C''z = D''$$

Allora volendo eliminare z avrassi

$$z = \frac{D - Ax - By}{C}, z = \frac{D' - A'x - B'y}{C'}, z = \frac{D'' - A''x - B''y}{C''}$$

e per conseguenza si avranno le due equazioni

$$(1^a) \frac{D - Ax - By}{C} = \frac{D' - A'x - B'y}{C'}$$

$$(2^a) \frac{D - Ax - By}{C} = \frac{D'' - A''x - B''y}{C''}$$

Codeste due equazioni contenendo due incognite avrassene una terza senza y (§ prec.), moltiplicando la prima per il coefficiente B'' di y nella seconda, e la seconda per il coefficiente B' dello stesso y nella prima, ed indi sottraendo dalla prima la seconda, quest'ultima dedotta equazione ci darà il valore di x in quantità cognite, quale sostituito in quello di y , avrassi di esso il valore cognito, ed alla fine sostituendo i due cognitivi valori di x ed y in z , otterrassi quello di quest'ultimo.

Delle equazioni di secondo grado.

§ 5. Se il grado di una equazione ci viene marcato dal massimo esponente della incognita (1.5^a § 1) segue, che una equazione di secondo grado potrà generalmente esprimersi per $Ax^2 \pm Bx = C$; dappoichè il coefficiente A è in generale la somma, o la differenza delle x^2 , come il coefficiente B delle x , e C esprimeci quantità cognite in qualunque modo combinate.

Or due casi possono accadere, 1° che l'equazione contenga oltre della seconda potenza della incognita la prima potenza di essa; 2° che la data equazione non contenga, che la sola incognita elevata a quadrato.

Nel primo caso il coefficiente B avrà un valore, nel secondo sarà $B=0$; e la generale equazione diverrà $Ax^2=C$, e per conseguenza $x^2=\frac{C}{A}$. Ma intanto cercasi x , ossia la radice di x^2 , dunque avrassi $x=\sqrt{\frac{C}{A}}$

Or siccome la radice quadrata di qualunque quantità può essere tanto positiva che negativa, così $\sqrt{\frac{C}{A}}$ dovrà avere un doppio segno, dunque sarà $x=\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$; cioè saranno due i valori di x , uno positivo, e l'altro negativo, che soddisfaranno egualmente la proposta equazione, valori che si contrassegnano col nome di radici. L'equazione suddetta $Ax^2=C$ appellasi *pura*. Esaminandola poi già ridotta ad $x=\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ vedrassi che soli due casi si presentano, cioè che sia C positivo, o pure negativo; nel primo caso sarà una quantità reale, o positiva o negativa; nel secondo essendo $x=\pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$, fatto $\frac{C}{A}=q$, sarà (1.2 § 17) $x=\pm\sqrt{-q}$, vale a dire una quantità immaginaria positiva o negativa.

§ 6. Passiamo ora al secondo caso in cui esiste la prima potenza di x , e perciò alla completa equazione

$$Ax^2 \pm Bx = C, \text{ quale riducesi ad } x^2 \pm \frac{Bx}{A} = \frac{C}{A}$$

Avendo presente il quadrato di un binomio (1. 2^a § 7), vedrassi che al primo membro di questa equazione per essere un quadrato perfetto non mancavi, che il quadrato della metà del coefficiente $\frac{B}{A}$, o sia $\frac{B^2}{4A^2}$, dunque unendo all' uno ed all' altro membro l' istesso quadrato avrassi

$$x^2 + \frac{B^2}{4A^2} \pm \frac{Bx}{A} = \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2}$$

Ma $x^2 \pm \frac{Bx}{A} + \frac{B^2}{4A^2}$ essendo già un quadrato perfetto

potrassene estrarre la radice (1. 2^a § 12) che sarà

$$x \pm \frac{B}{2A} = \pm \sqrt{\left(\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}\right)} = \pm \sqrt{\left(\frac{B^2 + 4AC}{4A^2}\right)}$$

e trasportando si avrà

$$x = \mp \frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2 + 4AC}{4A^2}\right)}, = \mp \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A}$$

Or C , come si è detto potrà essere (§ prec.) negativo, ed in tale ipotesi la formola superiore si trasformerà in

$$x = \mp \frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}$$

Nella prima formola essendo $B^2 + 4AC$ una quantità positiva, sarà sempre x una quantità *reale* o positiva o negativa. Nella seconda potranno accadere tre casi

$$1^{\circ} B^2 = 4AC; \quad 2^{\circ} B^2 > 4AC; \quad 3^{\circ} B^2 < 4AC$$

nel primo caso sarà x eguale ad una quantità *razionale* negativa o positiva; nel secondo caso chiamando q la differenza tra B^2 e $4AC$, sarà q positivo, e perciò x quantità *reale* positiva o negativa; nel terzo caso infine essendo $B^2 - 4AC = -q$, sarà x una quantità *immaginaria* positiva o negativa.

Da quanto si viene di esporre potressene generalmente dedurre:

Che una equazione di 2° grado ha due radici, o tutte e due reali, o tutte e due immaginarie, e che risolverassi con aggiungere al primo e secondo membro dell'equazione il quadrato della metà del coefficiente della prima potenza dell'incognita, e con estrarne indi la radice.

§ 7. Il metodo da noi impiegato, e la formola generale da noi dedotta per l'equazione di secondo grado, si estende ad alcune dei gradi superiori, le quali perciò si chiamano *derivate* dal secondo grado. Difatti sia data la equazione

$$Ax^4 + Bx^2 = -C \text{ fatto } x^2 = y, \text{ avrassi } Ay^2 + By = -C;$$

dunque (§ prec.) $y = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, Ma essendo $y = x^2$ sarà $x = \sqrt{y}$, perciò

$$x = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Fatti poi gli stessi ragionamenti, si deduce, che supposta l'equazione generale $Ax^{2m} + Bx^m = -C$, fatto

$$y = x^m, \text{ avrassi } x = \pm \sqrt[m]{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}.$$

Passiamo ora a presentare alcuni esempi per la risoluzione delle equazioni di secondo grado.

ESEMPIO 1°

« Vogliasi la radice dell'equazione $6298 = x + 160x - x^2$. »
Trasportando, e riducendo avrassi $x^2 - 161x = -6298$.
Compiendo il quadrato sarà

$$x^2 - 161x + \left(\frac{161}{2}\right)^2 = \left(\frac{161}{2}\right)^2 - 6298$$

o sia $x^2 - 161x + \frac{25921}{4} = \frac{25921}{4} - 6298$; perciò

$$(1. 2. § 13) \quad x - \frac{161}{2} = \pm \sqrt{\frac{729}{2}}, \text{ ossia } x = 161 \pm \sqrt{\frac{729}{2}};$$

ed estraendo la radice, avrassi $x = \frac{161 \pm 27}{2}$, dunque le due radici saranno $x = 94$, ed $x = 67$.

ESEMPIO 2°

« Ritrovare il valore di x in $\frac{342}{x-3} - \frac{342}{x} = 19$. »

Riducendo al comune denominatore il primo membro, avrassi

$$\frac{342x - 342x + 1026}{x^2 - 3x} = 19$$

e facendo svanire il divisore avrassi $19x^2 - 57x = 1026$,
perciò $x^2 - 3x = \frac{1026}{19} = 54$.

Or compiendo il quadrato si avrà

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 54 + \frac{9}{4} = \frac{225}{4}.$$

dunque estraendo la radice avrassi

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{225}}{2} = \pm \frac{15}{2}$$

perciò $x = \frac{15+3}{2} = 9$, o pure $x = \frac{-15+3}{2} = -6$.

§ 8. Se due nelle equazioni di secondo grado saranno le incognite, due egualmente esser dovranno le equazioni; il metodo da tenersi sarà, come in quelle di primo grado, l'*eliminazione*. Difatti abbiansi le due equazioni

$$Ax^2 + By^2 - x = C, \quad Ax^2 - By^2 + 2x = D$$

trattandosi di dover eliminare un' incognita, vedrassi facilmente, che eliminerassi l'*y* sommando le due equazioni, per cui si avrà riducendo

$$2Ax^2 + x = C + D, \text{ e per conseguenza } x^2 + \frac{x}{2A} = \frac{C+D}{2A}$$

c (§ prec.) compiendo il quadrato avrassi

$$x^2 + \frac{x}{2A} + \frac{1}{16A^2} = \frac{1}{16A^2} + \frac{C+D}{2A} = \frac{1+8AC+8AD}{16A^2}$$

ed estraendo la radice, e trasportando, si avrà in fine

$$x = -\frac{1}{4A} \pm \frac{\sqrt{1+8AC+8AD}}{4A}$$

determinata in quantità cognite l'*x*, e sostituendo il

no valore in una delle due date equazioni, avrassi in fine il valore dell'altra incognita y , e così risolte le due equazioni. Ecco un' applicazione: date le due equazioni

$$(1^a) \quad x^2 + y^2 - x = 39$$

$$(2^a) \quad x^2 - y^2 + 2x = 39$$

Sommandole svanirà l' y , ed avrassi $2x^2 + x = 78$; dunque $x^2 + \frac{x}{2} = 39$: e compiendo il quadrato si avrà

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 39 + \frac{1}{16} = \frac{625}{16}$$

$$\text{dunque } x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{625}{16}} = \pm \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Ma si ha $y^2 = 39 - x^2 + x$; dunque sostituendo il trovato valore di x avrassi $y^2 = 9$, ed $y = 3$, e così trovati i due valori di x , ed y .

§ 9. Non restaci ora, che applicare la teoria delle equazioni alla soluzione dei problemi di primo e secondo grado.

Il problema non è che la ricerca, che fassi di un oggetto conoscendone degli altri; desso dunque nella di lui enunciazione dee contenere delle quantità note, mediante le quali puossi conoscere l'incognita, ed il loro paragone costituisce l'equazione.

Mettere dunque in *equazione un problema* altro non significa, che di porlo in modo, che abbiasi un certo rapporto, tra le quantità date, e l'incognita che cercasi; locchè ottiensì con adeguatamente esprimere le condizioni del problema.

Questa operazione non ammette regola alcuna, ma dipende dalla sagacità, ed esercizio del calcolatore. Messo in equazione il problema, le regole già da noi sviluppate ci condurranno alla soluzione.

PROBLEMA 1°

Si domanda ad un generale a quanto ascende il di lui esercito. Risponde: dalla terza parte del mio esercito, togliendovi la quinta parte, non mi rimangono che 4000 soldati. Si cerca il numero totale componente il di lui esercito.

Sia x il numero cercato per la condizione del problema, avrassi dunque

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4000, \text{ perciò } \frac{5x-3x}{15} = 4000 = \frac{2x}{15}$$

dunque $2x = 15(4000) = 60000$, perciò $x = 30000$: per conseguenza l'esercito del generale è composto di 30000 soldati.

PROBLEMA 2°

Alessandro fino al terzo della di lui vita fu sotto la sorveglianza di Aristotile; in un altro terzo assistette suo padre Filippo fino alla battaglia di Cheronea; nel quarto della sua vita meno un anno dissece Dario e divenne re di Persia, ed ivi dopo tre anni morì. Si vuol sapere quanto visse.

Sia x la vita di Alessandro che cercasi, avrassi allora la seguente equazione:

$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x-1}{4} + 3 = x$; o sia $\frac{8x+3x-3}{12} + 3 = x$,
 o sia $x = 36 - 3 = 33$, vita di Alessandro.

PROBLEMA 3°

Una corona d'oro e di argento di un volume di 12 pollici, pesa 100 once; cercasi il peso rispettivo dell'oro e dell'argento, supponendosi che un pollice cubo di oro pesa once $12 + \frac{2}{3}$, ed un pollice cubo di argento pesa once $6 + \frac{8}{9}$.

La proposta conterrà due incognite, e perciò due equazioni.

Sia x il volume de' pollici cubi di oro, ed y quello dell'argento. Per la prima condizione avrassi $x+y=12$, e per la seconda $x(12+\frac{2}{3}) + y(6+\frac{8}{9}) = 100$; dunque (1.3° § 3) eliminando la x avrassi

$$x=12-y, \quad x = \frac{100}{(12+\frac{2}{3})} - y \frac{(6+\frac{8}{9})}{12+\frac{2}{3}} = \frac{300}{38} - \frac{186y}{342};$$

perciò si avrà $12-y = \frac{300}{38} - \frac{186y}{342}$; dunque

$$\frac{342y-186y}{342} = 12 - \frac{300}{38} = \frac{156}{38} = \frac{156y}{342}$$

perciò $y = \frac{53352}{5928} = 9$, e per l'equazione $x=12-y$ sarà $x=3$, cioè è risoluto il problema.

PROBLEMA 4°

L' esercito di Pompeo, e quello di Cesare non erano che alla distanza di 100 miglia. Tutti e due si mettono nel medesimo tempo in moto per incontrarsi, e battersi; ma il primo percorre in ogni ora due miglia, ed il secondo cinque: quanti miglia dee percorrere il primo, e quanti il secondo per giugnere al comune luogo, impiegando l'istesso tempo?

Sia x il numero delle miglia percorsi dal primo, y quelli trascorsi dal secondo quando s'incontreranno. In tal caso la distanza tra i loro punti di partenza sarà espressa per $x+y$, dunque per condizione avrassi $x+y=100$. Inoltre il tempo impiegato dall' esercito di Pompeo ci sarà espresso per l' incognito spazio x diviso per il numero delle miglia trascorsi in ciascuna ora, ed egualmente quello impiegato da Cesare; ma il tempo esser dee lo stesso in ambedue, dunque per condizione avrassi $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$, perciò $x = \frac{2y}{5}$, e per la prima $x=100-y$, perciò (L. 3° § 3) eliminando x avrassi $\frac{2y}{5} - 100 + y = 0$, o sia $y = \frac{500}{7} = (71 + \frac{5}{7})$, dunque sarà $x = (\frac{2y}{5}) = \frac{1000}{35} = 28 + \frac{20}{35}$; cioè per arrivare al luogo del combattimento dovette Cesare nel tempo istesso marciare 71 miglia, e tre settimi, e Pompeo nel medesimo tempo 28 miglia, e venti trentacinquesimi.

PROBLEMA 5°

Un generale dopo una battaglia perduta domanda ad un suo colonnello quanti soldati sonosi perduti nel di lui reggimento. Il colonnello risponde: se moltiplicherete il numero de' soldati uccisi per se stesso, ed indi vi toglierete questo numero medesimo, voi avrete 90. Si domanda il numero de' soldati uccisi.

Sia x il cercato, sarà $x \times x = x^2$ il prodotto per se stesso; dunque per condizione avrassi una equazione di secondo grado espressa per $x^2 - x = 90$. Or risolvendola (1.3° § 6.) otterrassi, compiendo il quadrato

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 90 + \frac{1}{4} = \frac{361}{4}$$

perciò $x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$, $x = \frac{1}{2} + \frac{19}{2} = 10$, perciò furono 10 i soldati uccisi.

PROBLEMA 6°

Si domanda ad un vecchio la di lui età. Risponde: se da essa, presa 161 volte, vi sottrarrete il prodotto per se stessa, voi avrete un periodo di 6298 anni; a quanto ascende la di lui età?

Chiamandola x per condizione avrassi $161x - x^2 = 6298$, perciò $x^2 - 161x = -6298$, onde

$$x^2 - 161x + \left(\frac{161}{2}\right)^2 = \left(\frac{161}{2}\right)^2 - 6298 = \frac{729}{4}, \text{ ossia}$$

$x = \frac{161}{2} + \frac{\sqrt{729}}{2} = 94$; o pure $x = 67$, preso il segno negativo.

PROBLEMA 7°

Trovar due numeri tali, che dalla somma de' loro quadrati sottratto il primo ci dà 39, e alla differenza poi di questi unendovi il doppio del primo diaci egualmente 39.

Chiamiamo x il primo numero, ed y il secondo per la (1ª) condizione avrassi (1ª) $(x^2 + y^2 - x = 39)$, e per la seconda condizione si avrà (2ª) $(x^2 - y^2 + 2x = 39)$. Or eliminando y con sommare, ed indi riducendo codeste equazioni si avrà $x^2 + x^2 - x + 2x = 78$; o sia $2x^2 + x = 78$: perciò $x^2 + \frac{x}{2} = 39$; e formando il quadrato sarà

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 39 + \frac{1}{16} = \frac{625}{16}$$

fatta l'estrazione si avrà

$$x + \frac{1}{4} = \pm \sqrt{\frac{625}{16}} = \pm \frac{\sqrt{625}}{4} = \pm \frac{25}{4}$$

dunque sarà $x = \frac{25-1}{4} = 6$. Ma si ha $y^2 = 39 + x - x^2$, dunque sostituendo il trovato valore di x avrassi

$$y^2 = 39 + 6 - 36 = 9$$

dunque $y = 3$. Perciò i numeri cercati saranno 6, e 3.

PROBLEMA 8°

Il fanciullo Pico della Mirandola essendo stato interrogato sulla di lui età, rispose: se voi la moltiplicherete tre volte per se stessa, e ne prenderete il quarto, unendovi poi il quatruplo del prodotto per se medesima avrete un periodo di 468 anni; cercasi la di lui età.

Sia questa x avrassi allora $\frac{x^4}{4} + 4x^2 = 468$, ossia $x^4 + 16x^2 = 1872$. Sarà questa un'equazione di quarto grado *derivata* dal secondo. Perciò (1.5° § 7) farassi $x^2 = y$, onde $x^4 = y^2$; dunque $y^2 + 16y = 1872$, e compiendo il quadrato, ed estraendo la radice avrassi

$$y = -8 \pm \sqrt{1936} = 44 - 8 = 36$$

Ma essendo $x^2 = y$, sarà $x = \sqrt{y} = \sqrt{36} = 6$. Dunque l'età richiesta sarà di anni sei.

Delle equazioni indeterminate.

§ 10. Dopo aver parlato delle equazioni determinate faremo qualche cenno sulle equazioni indeterminate, e problemi, che non eccedono il primo grado, che possono in qualche modo per la loro semplicità considerarsi come parte dell'algebra elementare.

Abbiassi la generale equazione $ax + by = M$. Sia primieramente $a = b = 1$, avrassi allora $x + y = M$, ed $x = M - y$. Or supposto ad y un valore otterrassi subito quello di x , ma i valori di y potranno essere un numero infinito, dunque infinita potrà essere la serie de' valori di x . Ma se supporrassi per condizione di dovere essere y , ed x quantità intere e positive, allora la serie de' valori possibili di y prenderà una forma finita, determinata dalle sole unità

componenti M . Difatti sia $M=10$, si avrà $x=10-y$. Or supposto x ed y positivi, ed interi, e non dovendo essere $x=0$, y non potrà essere maggiore di 9, dunque avrassi la seguente tavola de' valori di x , corrispondenti agli assegnati valori di y , cioè:

$$y=9 \dots\dots\dots x=1$$

$$y=8 \dots\dots\dots x=2$$

$$y=7 \dots\dots\dots x=3$$

$$y=6 \dots\dots\dots x=4$$

$$y=5 \dots\dots\dots x=5$$

Ma egualmente per l'equazione istessa $y=10-x$, supposto $x=1=2=3=4=5$, si avrà

$$y=9=8=7=6=5$$

dunque la proposta equazione potrassi risolvere in sole cinque maniere, allorchè si vuole limitare a' valori interi e positivi delle due incognite.

Ed in generale nella equazione $x+by=C$; e quindi in $x=C-by$ dovendo essere x intero e positivo, non potransi prendere per y che i numeri interi e positivi, tali che moltiplicato per b , ne sia il prodotto by minore di C , supposto $C>b$.

Dunque dal premesso ragionamento ricavasi che l'equazione $ax+by=M$ sarà sempre risolubile allorchè uno de' coefficienti a , ovvero b , o tutti e due saranno eguali all'unità.

Ma se però nessuno de' coefficienti sarà eguale all'unità,

e che ciascuno sia maggiore di questa; in tal caso bisognerà con metodi analitici ridurre uno di essi eguale all'unità per così aver luogo la precedente soluzione.

§ 11. Avendosi l'equazione $ax+by=M$, primieramente rifletterassi, che per essere x ed y de' numeri interi è necessario, che i due coefficienti a, b , non abbiano alcun fattore comune senza averlo nel tempo istesso il terzo m ; difatti se si avesse $a=lm, b=ln$, ne risulterebbe

$$lmx+lny=M, \text{ e perciò } mx+ny=\frac{M}{l}$$

dunque per essere x ed y interi dovrà pure esserlo $\frac{M}{l}$, e perciò l fattore di M ; e per conseguenza dividendo per codesto comune fattore a, b , gli stessi ridurransi a numeri primi tra loro. Ripresa ora l'equazione $ax+by=M$, in cui si ha $b > a$, avrassi $x = \frac{M}{a} - \frac{b}{a}y$. Or se b sarà perfettamente divisibile per a , lo sarà pure M , dunque $\frac{b}{a}$, ed $\frac{M}{a}$, saranno delle quantità intere, e supposti m , ed M' de' quozienti di $\frac{b}{a}$, e di $\frac{M}{a}$ la data equazione trasformerassi in $x+my=M'$, e perciò $(x=M'-my)$, equazione che rientra nel caso del § prec.

Ma se non sarà m un quoziente esatto di $\frac{b}{a}$, supposto perciò un residuo r , avrassi $\frac{b}{a} = m + \frac{r}{a}$, o sia $b = ma + r$, ed r sarà minore di a . Perciò sostituendo tal valore nella data equazione avrassi

$$ax + (ma + r)y = M, \text{ ossia } a(x + my) + ry = M$$

Ma $x + my$ sarà un intero, perciò farassi $x + my = t$, dunque si avrà $at + ry = M$.

Or se sarà $r = 1$ il problema sarebbe risoluto; dappoichè si avrebbe $x + my = t$, ed $y + at = M$, perciò $(x = t - my)$, ed $(y = M - at)$, ed avrebbe luogo perciò la soluzione del §. prec.

Ma se sarà $r > 1$, essendo però minore di a , potrà a dividersi per r ; se sarà a perfettamente divisibile per r , dovrà esserlo anche M (§ prec.), e perciò avrassi

$$\frac{a}{r} = m', \text{ ed } \frac{M}{r} = M'$$

denotandosi m' , ed M' de' numeri interi, sarà $a = m'r$, ed $M = M'r$, e l'equazione $at + ry = M$, trasformerassi in $m'rt + ry = M'r$, o sia in $m't + y = M'$, e perciò sarebbe risolubile per il § prec. dando a t de' successivi valori.

Ma se non sarà m' un quoziente esatto di $\frac{a}{r}$, allora avrassi un residuo r' , e perciò $\frac{a}{r} = m' + \frac{r'}{r}$, ossia $a = m'r + r'$. Or sostituendo questo valore di a nell'equazione $ry + at = M$, avrassi $ry + m'rt + r't = M$; ovvero $r(y + m't) + r't = M$.

Ma essendo y , m' , t degl'interi, lo sarà $y + m't$, dunque farassi $y + m't = u$, e perciò avrassi $(ru + r't = M)$; dunque avransi le seguenti equazioni

$$(x + my = t), (y + m't = u), (ru + r't = M)$$

nelle quali supposto $r'=1$, si avranno

$$(x=t-my), (y=u-m't), (t=M-ru)$$

e prendendo per u un numero intero dedurransi i valori di t, y, x in numeri interi.

Ma se sarà $r' > 1$ bisognerà operare sulla ultima equazione ($ru+r't=M$), come sulle precedenti; or essendo $r' < r$ potrassi dividere r per r' , se sarà r perfettamente divisibile per r' , dovrà esserlo anche M , ed avrassi

$$\frac{r}{r'} = m'', \text{ ed } \frac{M}{r'} = M'$$

allora l'equazione ($ru+r't=M$), ossia $(t+\frac{ru}{r'}=\frac{M}{r'})$ diverrà ($t+m''u=M'$), e perciò sarebbe risolubile per il § prec., dando ad u de' successivi valori. Ma se non sarà m'' un quoziente esatto di $\frac{r}{r'}$ avrassi un residuo r'' , e perciò $\frac{r}{r'} = m'' + \frac{r''}{r'}$ ossia ($r = m''r' + r''$), e sostituendo questo valore nella equazione $r't+ru=M$, avrassi $r't+u(m''r'+r'')=M$, e perciò $r'(t+um'')+ur''=M$. Ma essendo t, u, m'' interi, lo sarà pure $t+um''$, e perciò facendosi $t+um''=V$, avrassi ($r'V+ur''=M$), e nel caso di $r''=1$ si avranno

$$(x=t-my), (y=u-m't), (t=V-um''), (u=M-r'V)$$

valori, i quali saranno sempre interi, se lo sarà V .

Ecco una tavola dell'equazioni corrispondenti a' differenti residui, che potrà prolungarsi a piacere; chiamando

r, r', r'' ec. il primo, il secondo, il terzo residuo, e così di seguito.

*Tavola per la risoluzione delle equazioni
indeterminate di 1° grado.*

$$r = \pm 1 \quad (A) \quad \begin{cases} x = t - my \\ y = M - at \end{cases}$$

$$r > 1, r' = 0 \quad (B) \quad \begin{cases} m't + y = M' \\ x + m'y = t \end{cases}$$

$$r' = \pm 1 \quad (C) \quad \begin{cases} x = t - my \\ y = u - m't \\ \pm t = M - ru \end{cases}$$

$$r > 1, r'' = 0 \quad (D) \quad \begin{cases} x = t - my \\ y = u - m't \\ t + m''u = M' \end{cases}$$

$$r'' = \pm 1 \quad (F) \quad \begin{cases} x = t - my \\ y = u - m't \\ t = V - um'' \\ \pm u = M - r'V \end{cases}$$

ec.

ec.

ec.

Si risolve dunque un' equazione indeterminata di 1° grado, primieramente con dividere il coefficiente di una incognita per il coefficiente dell' altra; nel caso poi che avrassi un residuo, sostituerassi il dedotto valore del dividendo nella data equazione, quale nella ipotesi del residuo $= 1$ ci darà la cercata soluzione. Se poi sarà il residuo > 1 dividerassi il primo divisore

per il trovato residuo, e sostituendo nella data equazione il valore del dividendo, supposto un quoziente esatto, avrassi la soluzione. Se poi si avrà un residuo dividerassi il primo residuo per l'ultimo trovato, e facendo gli stessi ragionamenti e sostituzioni, si otterrà in fine una equazione, in cui sarà il residuo o nullo o eguale all'unità, e per conseguenza si otterrà la chiesta risoluzione.

Da tuttociò che precede scorgesi, che il metodo di risolvere le equazioni *indeterminate di 1° grado* poggia su quello di ritrovare il massimo comune divisore, metodo già da noi precedentemente sviluppato.

§ 12. Passiamo ora ad applicare codesta generale dedotta teoria alla soluzione di alcuni problemi.

PROBLEMA 1°

Un giuocatore dice ad un suo compagno: — la mia vincita presa sei volte, e la tua otto volte, formano la somma di onze 220. Si cerca il guadagno di ogni uno.

Sia x quella del primo, y quella del secondo, avrassi $6x+8y=220$. Comparando questa equazione colla formola generale (§ prec.), sarà $a=6$, $b=8$, $m=1$, $r=2$, $m'=3$, $M=220$. Perciò riandando al § preced. (formola B) avrassi $m't+y=\frac{M}{r}=M'$, o sia nel nostro caso $3t+y=\frac{220}{2}=110$, dunque ($y=110-3t$); or per essere y positivo bisognerà che sia $110>3t$, e perciò $\frac{110}{3}>t$. Ma si ha $x=t-my$,

e nel nostro caso $x=t-y=t-(110-3t)=4t-110$. Dunque dovrà essere $t > \frac{110}{4}$, quindi t dovrà essere maggiore di 27, e minore di 56; e perciò si avranno 8 soluzioni.

Così fatto p. e. $t=30$, avrassi ($y=110-90=20$) ed ($x=30-20=10$).

PROBLEMA 2°

Ritrovar due numeri, che moltiplicato il primo per 5, ed il secondo per 24, la loro somma sia di 109.

Sia x il primo, ed y il secondo, avrassi $5x+24y=109$, dunque nel nostro caso sarà $a=5$, $b=24$, $M=109$, $m=4$, $r=4$, $m'=1$, ed $r'=1$; perciò riandando al § prec. (formola C) avrassi ($x=t-4y$), ($y=u-t$), ($t=109-4u$), perciò ($y=5u-109$), e sostituendo in x il valore di y , e di t , si avrà ($x=545-24u$), dunque per ottenere y ed x positivi dovrà essere $u > \frac{109}{5}$, ed $u < \frac{545}{24}$, perciò esser deve $u=22$, per cui avrassi $y=1$, ed $x=17$; dunque i numeri cercati saranno 1 e 17; difatti ($85+24=109$). In questo problema non avvi che una sola soluzione, escludendo i numeri frazionari e negativi.

PROBLEMA 5°

Cercasi il valore di due numeri tali, che se a due terzi del primo unirassi il secondo avrassi 140.

Chiamando x il primo, ed y il secondo si avrà $\frac{2x}{3}+y=140$ ossia $2x+3y=420$; sarà dunque § prec. $a=2$, $b=3$, $M=420$, $m=1$, $r=1$. Or riandando al § prec. (formola A)

avrassi ($y=420-2t$), ($x=3t-420$); dunque dovendo essere y ed x positivi si avrà $420 > 2t$, ossia $210 > t$, e per la seconda $t > \frac{420}{3}$, o sia $t > 140$; dunque i limiti de' valori possibili della indeterminata t saranno 141, 209, perciò si potranno assegnare a t 68 differenti valori, e per conseguenza avrassi un *egual numero di soluzioni*.

Difatti supposto $t=141$, si avrà $\begin{cases} y = 138 \\ x = 5 \end{cases}$

supposto $t=142$, si avrà $\begin{cases} y = 136 \\ x = 6 \end{cases}$

supposto $t=143$, si avrà $\begin{cases} y = 134 \\ x = 9 \end{cases}$

e così ec. ec.

Finalmente supposto $t=209$ sarà $\begin{cases} y = 2 \\ x = 207 \end{cases}$

valori che soddisfano le condizioni del proposto problema.

PROBLEMA 4^a

Se dalla quinta parte de' miei bovi soemerovvi la quarta parte delle mie vacche, me ne rimarranno tre; si cerca il numero de' bovi, e delle vacche.

Sia x il numero de' bovi, y quello delle vacche, avrassi $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 3$, perciò $4x - 5y = 60$. Sarà dunque $a=4$, $b=-5$, $M=60$, $m=-1$, $r=-1$.

Or riandando al § prec. (formola A), avrassi $x-y=t$, e per l'equazione ($at + ry = M$), $4t - y = 60$, ossia

($y = 4t - 60$), perciò $t > 15$; ed essendo $x = t + y$, sarà ($x = 5t - 60$); perciò $t > 12$.

Dunque incominciando dal 16, t potrà avere infiniti valori interi e positivi, e per conseguenza dal limite $t = 15$, infinite saranno le soluzioni del proposto problema.

Difatti sia $t = 16$, avrassi $\left\{ \begin{matrix} y = 4 \\ x = 20 \end{matrix} \right\}$ e $4 - \frac{4}{4} = 3$

sia $t = 17$, sarà $\left\{ \begin{matrix} y = 8 \\ x = 25 \end{matrix} \right\}$ e $5 - 2 = 3$

sia $t = 18$, sarà $\left\{ \begin{matrix} y = 12 \\ x = 30 \end{matrix} \right\}$ e $6 - 3 = 3$

in fine sia $t = 100$ sarà $\left\{ \begin{matrix} y = 340 \\ x = 440 \end{matrix} \right\}$ e $88 - 85 = 3$

e così all'infinito.

§ 13. Pria di dar fine a questa lezione crediamo cosa utile il dar qualche idea delle cosiddette *quantità infinite* ed *infinitesime* sì usitate dagli antichi geometri, e mostrarne il loro vero e reale significato.

Abbiasi la frazione $\frac{a}{mb}$, supposte a , m , b , quantità intere: queste aumentando (l. 1.^a § 3) a proporzione della menomanza del di lei denominatore, sarà $\frac{a}{mb} < \frac{a}{(m-1)b}$ e per l'istessa ragione si avranno le seguenti ineguazioni

$$\frac{a}{(m-1)b} < \frac{a}{(m-2)b}, \frac{a}{(m-2)b} < \frac{a}{(m-3)b}, \frac{a}{(m-3)b} < \frac{a}{(m-4)b} \text{ ec.}$$

ed $\frac{a}{(m-m+2)b} < \frac{a}{(m-m+1)b}$, e perciò $\frac{a}{b} >$ di $\frac{a}{mb}$,
 di $\frac{a}{(m-1)b}$ di $\frac{a}{(m-2)b}$ di $\frac{a}{(m-m+2)b}$; ma
 $\frac{a}{(m-m+1)b} (= \frac{a}{b})$ è minore di $\frac{a}{(m-m)b} = \frac{a}{0}$

Dunque il massimo valore della proposta frazione sarà quello in cui più non esisterà un divisore qualunque, ma allora non sarà più una quantità che ha sempre per divisore l'unità, bisogna dunque, che dessa nel di lei aumento possa sempre avvicinarsi ad $\frac{a}{0}$, senza mai poterlo arrivare, sarà perciò $\frac{a}{0}$ il *limite* della quantità $\frac{a}{mb}$. Or codesto limite si è contrassegnato dagli antichi geometri col nome d'*infinito*, dappoichè *infinita* può esser la serie de' numeri, costituenti la differenza tra la quantità, ed il di lei *limite*.

L'infinito dunque altro non è, che il limite a cui nel crescere una data grandezza va accostandosi, in modo che la differenza, sia minore di qualunque data grandezza, senza mai però divenirle eguale.

Or si è marcato codesto *infinito*, o limite colla caratteristica ∞ , in modo che avrassi $\frac{a}{0} = \infty$. Abbiassi ora la frazione $\frac{ma}{b}$, per quanto si è detto (l. 1.^a § 3) sarà

$$\frac{ma}{b} > \frac{(m-1)a}{b} > \frac{(m-2)a}{b} > \frac{(m-m+1)a}{b}, \text{ o sia di } \frac{a}{b};$$

ma è $\frac{(m-m+1)a}{b} > \frac{(m-m)a}{b} \left(= \frac{0}{b} \right)$, dunque il minimo valore della frazione sarà quello in cui sarà $a=0$, ed ma allora non sarà più una quantità, quale ha sempre per suo coefficiente l'unità; dunque bisogna che dessa nel di lei decremento possa sempre avvicinarsi a zero, senza mai poterlo arrivare. Dunque sarà zero il *limite* della diminuzione della indeterminata quantità $\frac{ma}{b}$. Or questo limite, che è il segno cui può arrivare la diminuzione di una quantità senza mai poterlo eguagliare, chiamossi dagli antichi geometri *infinitesimo*.

L'infinitesimo dunque non è, che il limite cui una quantità decrescendo, tende sempre ad avvicinarsi senza mai poterlo arrivare.

Così potrassi chiamare l'infinito il *limite* in più $=\infty$, l'infinitesimo il *limite* in meno $=0$.

Or dunque dalla equazione $\infty = \frac{a}{0}$ deducesi:

1.° *Che una quantità finita divisa per il suo infinitesimo eguaglierà il di lei infinito.*

2.° Essendo $\frac{a}{\infty} = 0$ ricavasi: *Che una quantità finita divisa per il suo infinito, sarà eguale al di lei infinitesimo.*

3.° Essendo $\frac{\infty}{a} = \frac{1}{0} = \infty$, deducesi: *Che il quoziente*

dell'infinito per la quantità finita, sarà eguale all'infinito stesso.

4.° Essendo $\frac{0}{a} = \frac{1}{\infty} = 0$, ricavasi: Che l'infinitesimo di una quantità diviso per la quantità istessa, esprimerà l'infinitesimo istesso.

5.° Essendo $0 \times \infty = a$, deducesi: Che il prodotto dello infinito per l'infinitesimo, darà la quantità cui codesti limiti apparterranno.

6.° Essendo $b \pm \frac{a}{\infty} = b \pm 0 = b$, deducesi: Che aggiunto o tolto alla quantità finita il suo infinitesimo, essa non crescerà nè scemerà.

Del pari essendo $\infty \pm a = \infty \pm 0$, $\infty = \infty (1 \pm 0) = \infty$ ne segue: Che aggiunta, o tolta all'infinito la quantità finita, esso non aumenterà, nè diminuirà. Inoltre essendo $0 \cdot \infty = a$ perciò $\frac{0 \cdot \infty}{0} = \frac{a}{0}$ o sia $0 \cdot \infty = \frac{a \cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$;

ma $0 \times \infty = a$; dunque sarà $\frac{0}{0} = a$, cioè: Lo zero diviso per zero esprimerà una quantità finita indeterminata. Egualmente essendo $\frac{0 \times \infty}{\infty} = \frac{a}{\infty}$, perciò

$\frac{\infty}{\infty} = \frac{a}{\infty \cdot 0} = \frac{a}{a} = 1$, deducesi: Che il limite in più diviso per se stesso avrà un quoziente finito. Finalmente abbiassi $\infty^n \pm \infty^m$, e sia $n = m + k$, perciò $n > m$; sarà allora $\infty^{m+k} \pm \infty^m = \infty^m (\infty^k \pm 1)$. Ma

$\infty^k \pm 1 = \infty^k$, dunque $\infty^{m+k} \pm \infty^m = \infty^k \times \infty^m = \infty^{m+k}$,
e perciò $\infty^n \pm \infty^m = \infty^n$.

Cioè il limite, o l'infinito elevato ad una potenza inferiore svanirà a fronte di quello innalzato ad una potenza superiore nelle quantità intere.

Se però nella medesima ipotesi di $n=m+k$ avrassi

$$\frac{a}{\infty^m} \pm \frac{a}{\infty^n} = \frac{a}{\infty^m} \pm \frac{a}{\infty^{m+k}} = \left(a \pm \frac{a}{\infty^k} \right) \frac{1}{\infty^m}; \text{ ma}$$

$$\frac{a}{\infty^k} = 0, \text{ dunque avrassi } \frac{a}{\infty^m} \pm \frac{a}{\infty^n} = (a \pm 0) \frac{1}{\infty^m} = \frac{a}{\infty^m};$$

Cioè nelle quantità frazionarie l'infinito elevato nel denominatore ad una potenza superiore svanirà a fronte di quello denominatore infinito innalzato ad una potenza inferiore,

LEZIONE QUARTA

De' rapporti, delle proporzioni e progressioni,
e de' logaritmi.

§ 1. Due o più quantità possono tra loro essere eguali o disuguali. Nel primo caso si avranno delle equazioni, delle quali abbiamo a sufficienza ragionato; nel secondo avransi de' rapporti, su de' quali fa di mestieri ragionare.

Sia perciò $a > b$, ed ambedue delle quantità intere; desse potranno tra loro paragonarsi, o dividendo a per b , ed in questo caso sarà b un divisore di a , o pure sottraendo b da a ; nel primo caso avrassi un *quoziente*, nel secondo una *differenza*. Or codesto quoziente che c' indica il risultato del paragone tra la prima e seconda quantità appellasi *ragione o rapporto a quoziente*, ed impropriamente *geometrico*; nel secondo caso della sottrazione, la loro differenza nomasi *ragione o rapporto a differenza*, ed impropriamente *aritmetico*. Non essendo dunque il rapporto, che un paragone che fassi di due quantità, o sottraendole o dividendole, ne segue, che ogni rapporto suppone la coesistenza di due quantità; or la prima appellasi *anteecedente*, la seconda *conseguente*; se dunque chiameremo δ la differenza tra l'anteecedente a , ed il conseguente b , sarà $\delta = a - b$ il *rapporto a differenza*, e contrassegnando

per q il loro quoziente sarà $q = \frac{a}{b}$ il loro rapporto a quoziente.

§ 2. L'eguaglianza di due rapporti, o a quoziente, o a differenza costituisce una *proporzione*, che nel primo caso appellasi *equiquoziente* o *geometrica*, nel secondo *equidifferente* o *aritmetica*: da tuttociò deducesi, che ogni proporzione contener dee due *antecedenti*, e due *conseguenti*. Or si dividono l'uno dall'altro i due componenti rapporti, nelle equidifferenti col segno $\therefore$, e nelle equiquozienti col segno $::$: così $a.b \therefore c.d$ indica una proporzione equidifferente, ed $a:b::c:d$ una equiquoziente.

Dalla premessa nozione delle due proporzioni si deduce, che nella equidifferente se avrassi $a.b \therefore c.d$, e $c.d \therefore m.n$, si avrà $a.b \therefore c.d \therefore m.n$; e nella equiquoziente se sarà $a:b::c:d$, e $c:d::m:n$, si avrà pure $a:b::c:d::m:n$; dappoichè nella prima la differenza è costante, nella seconda lo sarà il quoziente.

Data l'idea delle *equidifferenti*, ed *equiquozienti*, esaminiamo la prima, per indi passare alla seconda.

§ 3. Siano le quattro quantità $a.b \therefore c.d$ in una proporzione equidifferente, allora (§ prec.) avrassi $a-b=c-d$, perciò (l. 3^a § 2) $a+d=b+c$.

Dunque in una proporzione equidifferente sarà la somma de' termini medi eguale a quella degli estremi.

Dalla equazione poi $a+d=b+c$ deducendosi $a-b=c-d$, si ricavano due eguali rapporti a differenza, e perciò una proporzione equidifferente.

Dunque una equazione può trasformarsi in una equidifferente proporzione.

Sia ora incognita una delle quattro quantità a per esempio, avrassi allora, dalla proporzione $a.b \therefore c.d$, $a = \frac{c.d}{b}$:

Cioè in una proporzione equidifferente la somma dei due medt termini, o de' due estremi meno uno estremo o un medio ci darà il valore di un estremo, o di un medio.

Dalla suddetta equazione $a + d = b + c$ potrà ritornarsi alla proporzione $a.b \therefore c.d$ dalla quale fu dedotta, ma ben anche alle proporzioni $a.c \therefore b.d$, $b.a \therefore d.c$; nella prima comparasi il primo antecedente con il suo conseguente, ed il secondo col suo, in tale stato dirassi essere la proporzione *diretta*; nella seconda il paragone fassi tra gli antecedenti ed i conseguenti, in tal caso la proporzione appellasi *permutata*; per la terza si ha il rapporto tra il conseguente e l'antecedente della prima ragione, con il conseguente ed antecedente della seconda; allora la proporzione chiamasi *conversa*. Da tuttociò ricavasi:

Che se quattro termini saranno direttamente proporzionali, lo saranno pure permutatamente, e conversamente.

Finalmente se l'antecedente della prima ragione starà al suo conseguente, come il conseguente della seconda al di lei antecedente, allora la proporzione sarà *inversa*, la quale non presentando la medesima equazione della diretta, non potrà dirsi, che se quattro quantità saranno direttamente proporzionali lo saranno pure inversamente.

Se ora in una proporzione equidifferente, il conseguente della prima ragione sarà antecedente della seconda, si avrà allora $a . b :: b . c$, ed avrassi $a+c=b+b=2b$, e perciò $b=\frac{a+c}{2}$; codesto termine antecedente, e conseguente nel tempo istesso, appellasi *medio proporzionale equidifferente*; e la proporzione *continua*.

Perciò in una proporzione continua equidifferente il medio proporzionale sarà eguale alla semisomma del primo e del terzo termine proporzionale.

Ripresa la proporzione $a . b :: c . d$, sarà $a+d=b+c$, dunque $m(a+d)=m(b+c)$, o sia $ma+md=mb+mc$; perciò $ma-mb=mc-md$, dunque $ma . mb :: mc . md$; per la ragione istessa se dividerassi per m , si avrà pure $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} . \frac{d}{m}$, dunque in generale:

Moltiplicando o dividendo tutti i termini di una proporzione equidifferente per una quantità istessa, la proporzione avrà sempre luogo.

§ 4. Sviluppate le proprietà delle proporzioni equidifferenti, passiamo a quelle equiquozienti. Abbiassi $a:b::c:d$, sarà dunque (1. 4. § 2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dunque $ad=bc$, perciò:

In ogni proporzione equiquoziente il prodotto de' termini estremi è sempre eguale a quello de' medi.

Se da $ad=bc$ ricavasi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; e perciò due eguali quozienti, se ne deduce:

Che da ogni equazione può ricavarsene una proporzione.

La proporzione $a:b::c:d$, e per conseguenza l'equazione $ad=bc$, supposta d un' incognita ci darà $d=\frac{bc}{a}$ cioè:

In una proporzione equiquoziente, dati tre termini, conoscerassi il quarto.

Di più siccome nella proporzione $a:b::c:d$, qualunque sia la posizione de' due medi, o de' due estremi, avrà sempre luogo l'equazione $ad=bc$, ricavasene, che nella proporzione equiquoziente, come nella equidifferente, se avrà luogo la *diretta*, avrallo eziandio la *permutata*, e la *conversa*.

Sia ora in un caso particolare $b=c$, sarà allora $b^2=ad$, e fattane una proporzione, avrassi $a:b::b:d$, in cui il conseguente della prima ragione, essendo antecedente della seconda, sarà un *medio proporzionale*, e la *proporzione continua*; essendo $b^2=ad$, sarà $b=\sqrt{ad}$, cioè:

Il medio proporzionale equiquoziente sarà eguale alla radice del prodotto del primo e terzo proporzionale.

Ripresa la proporzione $a:b::c:d$ avrassi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, perciò $\frac{ma}{mb}=\frac{mc}{md}$, dunque $ma:mb::mc:md$; per la ragione istessa avrassi $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$; ed essendo pure $\frac{ma}{mb}=\frac{c}{d}$, sarà $ma:mb::c:d$, o pure $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::c:d$.

Dunque moltiplicando o dividendo tutti i termini di una proporzione equiquoziente, o pure uno de' due rapporti, per la stessa quantità avrassi sempre una proporzione.

Essendo $a:b::c:d$, sarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ma $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$, ed $\frac{nc}{nd} = \frac{c}{d}$, dunque $\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}$, o sia $ma:mb::nc:nd$; per la ragione istessa si avrà $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

Cioè moltiplicando, o dividendo il primo rapporto per una quantità, ed il secondo per un'altra, la proporzione avrà sempre luogo.

Essendo $a:b::c:d$, ed $a:b::m:n$, perciò $a:b::c:d::m:n$ avrassi 1° $a \pm c \pm m : b \pm d \pm n :: a:b$; 2° $c \pm m : d \pm n :: a:b$. Dappoichè per la 1° avrassi (per essere $ad=bc$, $an=bm$) $ab \pm bc \pm bm = ab \pm ad \pm an$; e per la (2°) (per essere $bc=ad$, $bm=an$), si avrà $bc \pm bm = ad \pm an$, dunque:

Se quattro quantità o più saranno in proporzione equiquoziente, la somma o la differenza degli antecedenti, o porzione di loro, starà alla somma o differenza de' conseguenti, e porzione di essi, come un antecedente al suo conseguente.

Abbiansi le due proporzioni $a:b::c:d$, ed $m:n::p:q$, dunque $ad=bc$, ed $mq=np$; perciò $admq=bn cp$, dunque $am:bn::cp:dq$.

Cioè in due proporzioni moltiplicando i termini dell'una per quei dell'altra avrassi una proporzione.

Sia infine $a = m, b = n, c = p, d = q$, si avrà
 $m^2 : n^2 :: p^2 : q^2$.

Dunque se quattro quantità saranno in proporzione, lo saranno pure i loro quadrati.

Passiamo ora a sviluppare la teoria delle progressioni.

§ 5. In una progressione *equidifferente* i consecutivi termini crescono o diminuiscono con una medesima differenza; in quella però *equiquoziente* crescono o diminuiscono collo stesso quoziente; perciò nella prima la differenza è costante, nella seconda sarallo il quoziente. Esaminiamo per ora la prima.

Siano le quantità a, b, c, d, e, f, g , ec. che tra loro differiscono egualmente; sia δ la differenza comune; si vede chiaramente, che essendo $a > b, b > c, c > d, d > e$, ec. la serie sarà *decrecente*; e sottraendo da b, a , da c, b , da d, c , ec. la differenza sarà negativa; sarà poi positiva, e la serie *crescente* nel caso contrario di $a < b, b < c$, ec.

Dunque una progressione equidifferente sarà crescente se la differenza sarà positiva tra il conseguente e l'antecedente, decrecente se sarà negativa.

Or essendo $b - a = \pm \delta$, sarà $b = a \pm \delta$, ed essendo $c - b = \pm \delta$, sarà $c = b \pm \delta = a \pm 2\delta$, essendo $e - c = \pm \delta$, sarà $e = c \pm \delta = a \pm 3\delta$, e per la ragione istessa sarà $f = a \pm 4\delta, g = a \pm 5\delta$, e così ec. Dunque

sostituendo codesti valori, la proposta progressione potrà esprimersi per la serie

$$\div a . a \pm \delta . a \pm 2\delta . a \pm 3\delta . a \pm 4\delta . a \pm 5\delta , \text{ ec.}$$

Esaminandola vedrassi, che la differenza comune δ manca nel primo termine a , ed acquista poi di mano in mano i coefficienti 1. 2. 3. 4. 5. ec. nel secondo, nel terzo, nel quarto, nel quinto, nel sesto, ec. dunque nello ennesimo termine il primo termine a dovrà essere accresciuto di tante volte $\pm \delta$, quanti sono i termini, che lo precedono; Ora chiamando n il numero de' termini, quei antecedenti all'ennesimo termine saranno $n-1$; dunque il termine ennesimo sarà $= a \pm (n-1)\delta$, perciò la superiore serie diverrà

$$\div a . a \pm \delta . a \pm 2\delta . a \pm 3\delta . a \pm 4\delta . a \pm 5\delta \dots a \pm (n-3)\delta . a \pm (n-2)\delta . a \pm (n-1)\delta$$

Or sommando il primo, e l'ultimo termine, avrassi $2a \pm n\delta - \delta$, e sommando il secondo col penultimo, si avrà $2a \pm n\delta - \delta$, dunque sarà la prima somma eguale alla seconda; sommando il terzo coll'antipenultimo avrassi egualmente $2a \pm n\delta - \delta$, ed indi facendo le medesime operazioni, e gli stessi ragionamenti, dedurrassi:

Che in ogni progressione equidifferente la somma degli estremi e di tutti i termini equidistanti dagli estremi si eguaglieranno.

§ 6. Dalla dimostrata proprietà (§ 5) di essere la somma degli estremi eguale a quella de' medi in una proporzione equidifferente, si deduce che in una progressione equidifferente il primo termine sta al terzo come il doppio del

primo, al doppio del secondo, il primo al quarto come il triplo del primo, al triplo del secondo, ed in generale il primo all'ultimo ennesimo, come $n-1$ il primo, ad $n-1$ il secondo, cioè $\div a . a \pm \delta (n-1) \therefore (n-1) a . (n-1) (a \pm \delta)$; difatti sommando gli estremi, ed indi i medi, avrassi una equazione identica, e per conseguenza avrà luogo l'accennata proporzione.

Sia ora $n=3$, sostituendo avrassi

$$\div a . a \pm 2\delta \therefore 2 a . 2 (a \pm \delta); \text{ sia } n=4, \text{ otterrassi}$$

$$\div a . a \pm 3\delta \therefore 3 a . 3 (a \pm \delta), \text{ e così di seguito}$$

Ripresa la serie superiore esprimente una progressione equidifferente $\div a . a + \delta . a + 2\delta \dots a \pm (n-1)\delta$, si vede facilmente, che dato il numero de' termini, il primo, e la differenza, chiamando u il termine cercato avrassi $u = a \pm (n-1)\delta$. Sarà questa l'espressione del termine generale di una progressione equidifferente. Sia il termine generale u conosciuto, ed ignorisi il primo termine della progressione avrassi $a = u \mp (n-1)\delta$.

Dunque conosciuto il numero de' termini, l'ultimo, e la differenza, conoscerassi il primo termine.

Sia ignota la differenza avrassi $\delta = \frac{u-a}{\pm(n-1)}$.

Perciò conosciuto il numero de' termini, il primo e l'ultimo otterrassi la differenza.

Finalmente volendo il numero de' termini l'equazione $n = \frac{u \pm \delta - a}{\pm \delta}$ ce lo additerà.

§ 7. Passiamo a ritrovare il *termine sommatorio* di una progressione equidifferente, vale a dire la formola generale esprimente la somma di tutti i termini componenti tal progressione. Chiamiamo S il cercato *termine sommatorio*, siccome (§ 5°) abbiamo dimostrato, che le somme a due a due de' termini equidistanti dagli estremi sono tra loro eguali, ne segue, che la somma del primo ed ultimo termine ripetuta n volte la sua metà sarà eguale alla cercata somma della progressione; perciò (1°) $\left[S = \frac{n(a+u)}{2} \right]$.

Dunque conoscendo il primo, l'ultimo ed il numero de' termini conoscerassi la loro somma.

Se in quest'ultima formola sostituerassi il valore del termine generale u , si avrà

$$S = \frac{n[a + a \pm (n-1)\delta]}{2}, \text{ ossia } (2^\circ) \left[S = n \left(a \pm \frac{(n-1)}{2} \delta \right) \right]$$

Perciò conoscendo il primo, la differenza, ed il numero de' termini si conoscerà la loro somma.

Ma (§ prec.) $a = u \mp (n-1)\delta$, dunque sostituendo tal valore nella (1°) formola avrassi

$$S = \frac{n[u \mp (n-1)\delta + u]}{2}, \text{ ossia } (3^\circ) \left[S = n \left(u \mp \frac{(n-1)}{2} \delta \right) \right]$$

Finalmente sostituendo nella (1°) formola il valore di

$$n = \frac{u \pm \delta - a}{\pm \delta} \text{ (§ prec.)}, \text{ avrassi } S = \frac{(a+u)}{2} \frac{(u \pm \delta - a)}{\pm \delta},$$

ossia (4°) $\left[S = \frac{(a+u)}{2} \left(1 + \frac{u-a}{\pm \delta} \right) \right]$.

Dunque delle cinque quantità S, a, u, n, δ , conosciutene quattro avrassi la quinta.

Passiamo ora all'analisi delle progressioni equiquozienti,

§ 8. Siano le quantità a, b, c, d, e, f , ec. tali, che dividendo la seconda per la prima, la terza per la seconda, la quarta per la terza, abbiano il medesimo quoziente q ; in tale ipotesi (§ 5.) la progressione sarà equiquoziente. Ora essendo. $\frac{b}{a} = q, \frac{c}{b} = q, \frac{d}{c} = q$, ec. Sarà

$$b = aq, c = bq = aq^2, d = cq = aq^3,$$

e per la ragione istessa $e = aq^4, f = aq^5$ ec. perciò la serie potrà rappresentarsi per $\therefore a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$: ec. In questa serie il comune quoziente q manca al primo termine a , ed acquista poi di mano in mano gli esponenti 1, 2, 3, 4, ec. nel secondo, nel terzo, nel quarto, nel quinto ec. dunque all'ennesimo termine il quoziente q avrà per suo esponente $n-1$, perciò la serie sarà espressa per $\therefore aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \dots : aq^{n-3} : aq^{n-2} : aq^{n-1}$. Or gli esponenti in essa conservano tra loro una costante differenza, dunque (§ 5.) gli stessi formeranno una *progressione equidifferente*. Perciò deducesi:

Che se i vari esponenti di una quantità saranno in progressione equidifferente, le varie potenze di essa formeranno una progressione equiquoziente, ed alla inversa.

Moltiplicando ora il primo e l'ultimo termine avrassi $aq^0 \times aq^{n-1} = a^2 q^{n-1}$, e poi il secondo col penultimo termine si avrà $aq^1 \times aq^{n-2} = a^2 q^{n-1}$, dunque sarà il primo prodotto eguale al secondo, e moltiplicando poi il terzo coll'antipenultimo, avrassi sempre $a^2 q^{n-1}$, e così ec.

Dunque in ogni progressione equiquoziente i prodotti degli estremi, e di tutti gli equidistanti dagli estremi si eguaglieranno.

§ 9. Dalla natura di una progressione equiquoziente si ricava, che il primo termine sta al terzo, come il quadrato del primo a quello del secondo, il primo sta al quarto come il cubo del primo al cubo del secondo; ed in generale il primo all'ennesimo termine come la potenza $n-1$ del primo a quella $n-1$ del secondo. Difatti supposta l'accennata proporzione avrassi

$$a : aq^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1} q^{n-1}$$

e fatto il prodotto degli estremi e dei medi, avrassi $a^n q^{n-1} = a^n q^{n-1}$, equazione identica, e per conseguenza (§ 2.) avrà luogo l'accennata proporzione, sia $n=3$, avrassi $a : aq^2 :: a^2 : a^2 q^2$, cioè primo : terzo :: il quadrato del primo : al quadrato del secondo. E fatto $n=4$ si avrà $a : aq^3 :: a^3 : a^3 q^3$.

Ripresa la serie trovata

$$:: aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 \dots : aq^{n-2} : aq^{n-1}$$

si vede facilmente, che dato il numero de' termini il primo ed il quoziente, chiamando u il termine cercato avrassi $u = aq^{n-1}$, sarà questa l'espressione del termine generale di una progressione equiquoziente.

Dunque conosciuto il primo, il numero de' termini, ed il quoziente conoscerassi il termine generale.

Da questa equazione avrassi $a = \frac{u}{q^{n-1}}$.

Perciò conosciuto il numero de' termini, l'ultimo, ed il quoziente, otterrassi il primo termine.

Finalmente deducendo il valore di q si avrà $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

Cioè conosciuto il numero de' termini, il primo, e l'ultimo conoscerassi il quoziente.

Passiamo ora, conservando l'istessa analisi delle equidifferenti, a ritrovare il termine sommatorio di una progressione equiquoziente.

§ 10. Chiamando S il termine sommatorio, si rifletterà, che non essendo la progressione equiquoziente, che una proporzione continua, ne segue (§ 4.), che la somma degli antecedenti starà a quella de' conseguenti come uno antecedente al di lui conseguente; ma in una progressione, tutti i termini, eccetto l'ultimo, sono degli antecedenti, e perciò la loro somma sarà espressa per $S - u$, tutti i termini poi eccetto il primo, essendo de' conseguenti la loro

somma sarà espressa per $S-a$, dunque avrassi

$$S-u: S-a:: a: aq; \text{ perciò } (1^a) \left(S = \frac{uq-a}{q-1} \right)$$

Dunque conoscendo il primo, l'ultimo termine, ed il quoziente avrassi la somma.

Sostituendo in questa il valore di $u=aq^{n-1}$ (§ prec.) avrassi

$$(2^a) \left(S = a \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \right), \text{ cioè}$$

Conoscendo il primo termine, il quoziente, ed il numero de' termini, si avrà la loro somma.

Sostituendo in questa il valore di $a = \frac{u}{q^{n-1}}$, si avrà la

$$(3^a) \left[S = \frac{u}{q^{n-1}} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \right]$$

Dunque dato l'ultimo termine il quoziente, ed il numero de' termini conoscerassi la loro somma.

Finalmente sostituendo nella (1^a) il valore di

$$q = \frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}, \text{ si avrà } S = \left(\frac{u \cdot u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a \right) : \left(\frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1 \right) =$$

$$\frac{u^{\frac{1}{n-1} + 1} - a^{\frac{1}{n-1} + 1}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{u^{\frac{1+n-1}{n-1}} - a^{\frac{1+n-1}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

e perciò (4^a)
$$S = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\frac{1}{u^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{n-1}}}}$$

Dunque conoscerassi il termine sommatorio di una progressione dato il primo, l'ultimo ed il numero dei termini.

In generale delle cinque quantità S, a, u, q, n, datene quattro si avrà la quinta purchè la cercata non sia n.

Applicazione delle proporzioni, e progressioni ad alcuni problemi.

§ 11. La prima applicazione degli equiquozienti è la tanta conosciuta *regola del tre*, essa non essendo che una proporzione, può dunque (§ 3.) essere o *diretta*, o *inversa*, o *composta*; sarà diretta se la quantità che cercasi, che ha per di lei conseguente la data, cresce o decresce come quest'ultima. Inversa se aumenta, o diminuisce, come diminuisce, o cresce il conseguente, o sia la data. Finalmente composta se aumenta, o diminuisce a proporzione dell'aumento o diminuzione, o inversamente, del prodotto di più quantità suo conseguente. Ecco alcuni esempi di tutte e tre le accennate proporzioni.

Si sa dalla meccanica, che nel moto uniforme lo spa-

zio è uguale al prodotto della celerità del mobile per il tempo impiegato. Se dunque chiameremo S lo spazio, C la celerità, t il tempo, avrassi $S=Ct$; dunque per un altro mobile sarà $S'=C't'$, perciò $S \times C't' = S' \times Ct$, dunque (§ 4.) $S : S' :: Ct : C't'$, e siccome in essa proporzione gli spazî crescono a corrispondenza del prodotto delle celerità, e de' tempi, così dirassi che gli spazî percorsi nel moto uniforme sono in *diretta ragione della composta* de' tempi, e delle celerità.

Se ora i corpi impiegano tutti e due l'istesso tempo, allora sarà $t=t'$, e perciò $S : S' :: Ct : C't$, o sia (§ 4.) $S : S' :: C : C'$, dunque avrassi il cercato spazio percorso nel tempo istesso con una *regola di tre semplice diretta*.

Essendo $S=Ct$, sarà $C=\frac{S}{t}$, e per un altro mobile $C'=\frac{S'}{t'}$, dunque $C : C' :: \frac{S}{t} : \frac{S'}{t'}$, e per (§ 4.)

$$C : C' :: S \times t' : S' \times t$$

Or siccome in essa proporzione il valore di C rapporto a C' aumenta come cresce S rapporto ad S' , e diminuisce t rapporto a t' , così dirassi:

Che le celerità di due corpi staranno tra loro nella ragion composta della diretta degli spazî, e della inversa de' tempi.

Ed in fine se sarà $S=S'$, avrassi (§ 3.) $C : C' :: t' : t$, e perciò una *regola di tre inversa* ci darà la cercata celerità.

§ 12. Non restaci ora che applicare questa teoria alla soluzione di alcuni problemi.

PROBLEMA 1°

Si sa dalla dinamica che nel moto uniformemente accelerato gli spazi percorsi sono proporzionali a' quadrati de' tempi impiegati.

Se dunque un corpo cade in 3 minuti da un'altezza di 100 canne, in 6 minuti da quale altezza cadrà?

Chiamando x il cercato spazio avrassi la seguente proporzione $100 : x :: 3^2 : 6^2$, o sia $100 : x :: 9 : 36$; e per § 2.

$$x = \frac{100 \times 36}{9} = 400;$$

cioè il corpo percorrerà un'altezza di 400 canne.

PROBLEMA 2°

Per rendere rotabile 4 miglia di strada, sonosi impiegati 50 operai: quanti ve ne abbisogneranno per rendere nel tempo istesso rotabile 70 miglia?

Si vede chiaramente, che il numero degli operai deve crescere a proporzione dell'aumento del lavoro; dunque gli operai ed i lavori saranno in proporzione diretta, e perciò avrassi una regola di tre diretta. Chiamando x il cercato numero si avrà $50^{\text{oper.}} : 4^{\text{migl.}} :: x : 70^{\text{migl.}}$, perciò $x = 875$. Dunque per terminare nel tempo istesso il lavoro ci bisogneranno 875 operai.

PROBLEMA 3°

Un capitale di onze 400 impiegato dà in 4 anni

un profitto di onze 112; qual ne darà in 12 anni?

Crescendo il profitto in ragione degli anni, ed essendo lo stesso il capitale, gli anni ed i profitti saranno in diretta proporzione, dunque avrà luogo la diretta regola del tre. Chiamando perciò x il cercato profitto, avrassi $4:112::12:x$, perciò $x=336$. Dunque alla fine di 12 anni il capitale frutterà onze 336.

PROBLEMA 4°

Venti uomini fanno 160 canne di lavoro in quindici giorni; quante ne faranno 30 in 12 giorni?

In questo problema si vede, che il lavoro aumenta, come aumentano gli uomini, ed i giorni; dunque i lavori saranno in ragion composta del numero degli uomini e de'giorni, perciò avrassi una regola di tre composta. Chiamando x il cercato lavoro si avrà $160:20 \times 15::x:30 \times 12$, perciò $x=192$; dunque il lavoro sarà di 192 canne.

PROBLEMA 5°

Un generale ordina alla di lui colonna di marciare 14 ore al giorno per arrivare il nemico; si sa che il nemico, marciando 8 ore al giorno, fe' l'istessa marcia in 11 giorni; si desidera sapere in quanti giorni arriveravvi la colonna, seguendo l'ordine del generale.

E chiaro che dal maggior numero di ore impiegate in ciascun giorno deve risulterne un minor numero di giorni; dunque le ore con i giorni sono in una inversa ragione, e perciò avrà luogo la regola di tre inversa. Chiamando

dunque x il cercato numero de' giorni, avrassi

$$14^{\text{ore}} : 11^{\text{gior.}} :: 8^{\text{ore}} : x, \text{ perciò } x = 6 + \frac{2}{7}$$

cioè la colonna impiegherà sei giorni e due settimi per arrivare il nemico.

§ 13. La *regola di società* non è che un caso particolare di quella del tre, e perciò interamente poggia sulla natura di una proporzione. Ecco un esempio.

Tre soci mettono in commercio 1800 once di capitale, che ha fruttato once 900. Si cerca quanto compete a ciascun di questo frutto, sapendosi che il capitale del primo fu di once 600, del secondo di once 800, e del terzo di once 400.

Sia x il cercato frutto del primo, y quello del secondo, z quel del terzo; siccome il frutto aumenta a proporzione del capitale, così per cadauno de' tre avrassi una proporzione diretta; perciò per il primo $1800 : 600 :: 900 : x$; o sia $2 : 600 :: 1 : x$, perciò $x = 300$; per il secondo si avrà $1800 : 800 :: 900 : y$, o sia $2 : 800 :: 1 : y$, perciò $y = 400$; per il terzo avrassi $z = 200$. Finalmente se fossero in generale, in vece di tre, n il numero de' soci, mediante n proporzioni risolverassi il quesito.

La regola di *falsa posizione* dipende eziandio da una proporzione equiquoziente.

Mediante la suddetta regola si determina un numero cercato e vero, per un falso e supposto; ed indi resul-

tatane una proporzione, applicavisi la regola del tre.

Sia x quel numero tale da essere $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{r} = M$, se ne cerca il valore mediante la falsa posizione.

Si scelga un numero a divisibile per m, n, r , e sia $\frac{a}{m} + \frac{a}{n} + \frac{a}{r} = Q$, che non è intanto il dato M , dunque non sarà $x = a$. Ma qualunque sia il valore cercato di x avrassi sempre la proporzione

$$a : x :: \frac{a}{m} : \frac{x}{m} :: \frac{a}{n} : \frac{x}{n} :: \frac{a}{r} : \frac{x}{r}, \text{ dunque (§. 4.)}$$

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{n} + \frac{a}{r} (=Q) : \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{r} (=M) :: a : x, \text{ o sia}$$

perciò $x = \frac{aM}{Q}$.

Dunque nella regola di falsa posizione si ottiene il cercato valore, nel quoziente del prodotto del numero dato per il supposto, diviso per il numero erroneo risultato.

Se dunque essa regola deducesi dall'equazione $x = \frac{aM}{Q}$, ricavasi in primo luogo:

Che la regola di falsa posizione non ha luogo, che per i problemi di primo grado, e ad una incognita.

Ma ogni equazione di primo grado ad una incognita (1.3. § 2.) potrassi generalmente esprimere per $Lx + r = M$. Or dunque se in essa equazione sostituerassi ad x la quantità supposta a , e chiamando come sopra Q il risultato er-

roneo che ne viene, essa ridurrassi ad $L a \pm r = Q$, perciò $L \pm \frac{r}{a} = \frac{Q}{a}$. Dall'altra parte essendo $L x \pm r = M$, sarà $L \pm \frac{r}{x} = \frac{M}{x}$. Ma per la dimostrata regola dovendo aversi la proporzione $Q : M :: a : x$, e perciò $\frac{Q}{a} = \frac{M}{x}$. Ma per essere $\frac{Q}{a} = \frac{M}{x}$ bisogna che nelle due equazioni suddette sia $a = x$, cioè il numero supposto eguale al cercato contro l'ipotesi, o che sia $r = 0$.

Dunque la regola di falsa posizione semplice non può servire se non allorquando il problema dipende da una equazione della forma $Lx = M$, e però da condizioni per le quali la quantità cognita M uguagli il prodotto della incognita x , con una o più quantità note (siano esse intere positive, o negative, o fratte) espresse dalla sola L .

Applichiamo questa regola al seguente problema.

Si domanda ad un giuocatore a quanto ascese la di lui vincita; risponde, la metà di essa unita al quinto, ed all'ottavo, formano onze 297: cercasi il di lui guadagno.

Sia x la cercata vincita, sia 40 il preso numero supposto divisibile per 2, 5, 8, perciò $\frac{40}{2} + \frac{40}{5} + \frac{40}{8} = 33$; dunque nel nostro caso sarà $M = 297$, $a = 40$, $Q = 33$, perciò sostituendo avrassi $x = \frac{40 \times 297}{33} = 360$. Se però il pro-

posto problema dipenderà da una equazione $Lx \pm r = M$ in cui non sarà $r = 0$, allora avrà luogo la regola di *falsa posizione doppia*, con supporre, come vedrassi, non uno ma due numeri arbitrari: Difatti sottratta dalla equazione $Lx \pm r = M$ la supposta $La \pm r = Q$, avrassi $L(x-a) = M-Q$. Immaginisì ora un altro arbitrario numero n , quale posto in vece di x nell'equazione generale, ci dia un risultato N , e perciò avrassi $Ln \pm r = N$, e sottraendo questa dalla generale equazione avrassi $L(x-n) = M-N$. Or dunque le due trovate equazioni $L(x-a) = M-Q$ ed $L(x-n) = M-N$, ci daranno $M-Q : M-N :: x-a : x-n$. Sia ora $M > Q$, e di N , sarà $M-Q = p$, $M-N = q$, dunque avrassi $p : q :: x-a : x-n$, perciò $x = \frac{pn-qa}{p-q}$. Nel caso poi che sarà $M < Q$, e di N , si avrebbe $M-Q = -p$, $M-N = -q$, e sempre otterrassi $x = \frac{pn-qa}{p-q}$.

Se finalmente sarà $M < Q$, ma $M > N$, si avrebbe $M-Q = -p$, ed $M-N = q$, ed $x = \frac{pn+qa}{p+q}$. Dunque le due espressioni $\frac{pn-qa}{p-q}$, e $\frac{pn+qa}{p+q}$ quantunque non contengono nè il coefficiente L , nè r , pure soddisfano all'equazione $Lx \pm r = M$; la prima quando le differenze $M-Q$, $M-N$ sono di egual segno, la seconda con segni contrarij, dunque:

Per la regola di falsa posizione doppia, 1° bisogna

supporre due numeri arbitrari a, n ; 2° praticare su ciascun di essi le condizioni del problema; 3° se nè l'uno, nè l'altro vi soddisfano, sottrarre i risultati Q , ed N , che ne vengono dal risultato M , che ne dovrebbe venire; 4° moltiplicare la prima differenza $M-Q=p$, per l'arbitrario secondo numero n , e la seconda differenza $M-N=q$, per l'arbitrario primo numero a ; 5° finalmente la differenza di questi due prodotti $np-qa$ dividerla, quando i due errori p, q sono di egual segno, per la data differenza $p-q$ degli errori medesimi, e quando gli errori p, q sono di segni contrarj la somma de' loro prodotti $ap+aq$ dividerla per la somma $p+q$.

Presentiamo un problema per la soluzione del quale fassi uso della già dedotta regola di doppia falsa posizione.

Si desidera dividere un numero di monete a tre poveri in modo che data al primo la metà di esso numero più una moneta, al secondo la metà del residuo del primo più una moneta, al terzo la metà del residuo del secondo più una moneta, rimanghi una moneta; cercasi il numero di esse monete.

Scelgo i numeri arbitrari 30, e 18, perciò sarà nel nostro caso $a=30$, $n=18$, verificando le condizioni del problema, tolta la porzione del primo povero, rimarrà o 14, o 8, e togliendo la parte del secondo resulerà 6, o 3; finalmente prendendo la porzione del terzo povero, resterà

2, o $\frac{1}{2}$, dunque i due errori saranno 2; ed $\frac{1}{2}$, sarà perciò $Q=2$, $N=\frac{1}{2}$, e nel nostro caso il vero prodotto sarà $M=1$; dunque avrassi $p(=M-Q)=1-2=-1$, $q(=M-N)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, e chiamando x il cercato numero, per essere p e q con segni contrarj avrassi

$$x \left(= \frac{pn+qa}{p+q} \right) = \frac{1 \times 18 + 30 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{66}{\frac{3}{2}} = 22$$

§ 14. Passiamo ora a risolvere alcuni problemi mediante la teoria delle progressioni equidifferenti.

PROBLEMA 1°

Si dimostra col calcolo, che un corpo abbandonato alla di lui gravità, describe nel primo istante uno spazio come uno, nel secondo come tre, nel terzo come cinque ec. vale a dire gli spazj trascorsi formeranno una praggessione equidifferente.

Or dimandasi, conoscendo il primo percorso spazio=1, l'ultimo=19, ed il numero degli spazj=10, la somma totale di questi ultimi.

In questo problema conoscesi il primo, l'ultimo, ed il numero de' termini, e cercasi il termine sommatorio S ; sarà perciò nella formola generale (§ 7.) $S = \frac{n}{2}(a+u)$, e sostituendo si avrà $n=10$, $a=1$, $u=19$, dunque $S = \frac{10}{2}(1+19)=100$; perciò sarà lo spazio che percorresi dal corpo eguale a 100.

PROBLEMA 2°

Un corpo cadendo descrive nel primo minuto secondo un piede, e nell' ultimo 27 piedi; la somma totale dello spazio descritto è di 196 piedi; cercasi il numero de' secondi impiegati.

Ripresa la formola generale $S = \frac{n}{2}(a+u)$, sarà nel nostro caso n la cercata $S=196$, $a=1$, $u=27$, dunque avrassi $n = \frac{592}{28} = 14$; perciò il corpo impiegherà nella di lui caduta $14''$.

PROBLEMA 3°

Un generale ordina ad un reggimento di marciare per 10 giorni continui, in modo che nel primo giorno dee percorrere tre miglia, e negli altri giorni deve sempre aumentare la di lui marcia di due miglia. Si domanda nel decimo giorno quanto miglia dovrà percorrere.

In questo problema avrà luogo una progressione equidifferente, dappoichè le successive marce hanno una costante differenza, dappoichè $\delta=2$, dunque presa la formola generale (§ 6.) $u=a+\delta(n-1)$, nel nostro caso sarà $a=3$, $\delta=2$, $n=10$, perciò il cercato sarà $u=21$; dunque la marcia dovrà essere nel decimo giorno di miglia 21.

PROBLEMA 4°

Un giuocatore dopo 10 puntate al faraone vinse 155 zecchini, in modo che nella prima puntata ne vinse 2, ed indi sino all' ultima aumentava in ciascuna

21.

della stessa quantità la di lui vincita; cercasi il successivo aumento.

Si scorge facilmente, che i termini del dato problema formano una progressione equidifferente, nella quale vuolsi conoscere la differenza conoscendo il primo termine, la somma, ed il numero de' termini. Or riandando al § 7. (2°) avrassi $S = n \left(a + \delta \frac{(n-1)}{2} \right)$, e perciò $\delta = \frac{2(S-na)}{n(n-1)}$, ed essendo nel nostro caso $S=155$, $n=10$, $a=2$, avrassi sostituendo $\delta = \frac{270}{90} = 3$; dunque l'aumento cercato sarà di tre zecchini.

PROBLEMA 5°

Quale spazio dovrà percorrere nel primo secondo un corpo in vigore della di lui gravità supposta la costante differenza di due piedi, per così in 10" trascorrere uno spazio eguale a 140 piedi?

Essendo la differenza costante avrassi una progressione equidifferente, nella quale conoscesi la differenza $\delta = 2$, la somma $S=140$, il numero de' termini $n=10$, e cercasi il primo termine a . Riandando al § 7. avrassi

$$S = n \left(a + \delta \frac{(n-1)}{2} \right), \text{ perciò } a = \frac{S}{n} - \frac{\delta(n-1)}{2}$$

e sostituendo i rispettivi valori avrassi $a=14-9=5$; dunque il corpo dovrà percorrere nel primo secondo 5 piedi.

§ 15. Passiamo a risolvere alcuni problemi ne' quali avrà luogo la progressione equiquoziente.

PROBLEMA 1°

Un giuocatore raddoppia sempre la di lui puntata, ed incomincia con un zecchino, perde consecutivamente 7 poste; si desidera sapere la di lui perdita.

Raddoppiando sempre avrassi dunque una progressione equiquoziente, il di cui costante rapporto sarà $q=2$, il primo termine $a=1$, ed il numero de' termini $n=7$; cercasi il termine sommatorio S . Or (§ 10.) si ha (2^a)

$$S = a \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ dunque nel nostro caso avrassi}$$

$$S = \frac{(2^7 - 1)}{2 - 1} = 127; \text{ perciò la perdita è stata di 127 zecchini.}$$

PROBLEMA 2°

Un viaggiatore nel primo giorno fa solamente tre miglia, va poi sempre duplicando il di lui cammino; cercasi, trascorrendo 189 miglia, quanto ne dovrà percorrere l'ultimo giorno.

In questo problema ha luogo una progressione, in cui conoscesi il primo termine $a=3$, il costante rapporto $q=2$, ed il termine sommatorio $S=189$, e sarà l'incognita l'ultimo termine u , or (§ 10.) (1^a) si ha $S = \frac{u q - a}{q - 1}$, e perciò

$$u = \frac{(189 + 3)}{2} = 96; \text{ perciò l'ultimo giorno dovrà trascorrere 96 miglia.}$$

PROBLEMA 3°

La costruzione di un canale si è eseguita in 7 anni duplicandola ogni anno, l'ultimo anno il lavoro è di 64 miglia; si vuol sapere quanto se ne costruì il primo anno.

In questo problema conoscesi l'ultimo termine $u=64$ il numero de' termini $n=7$, ed il costante rapporto $q=2$, dunque sarà il primo a il cercato. Or (§ 9.) $a = \frac{u}{q^{n-1}}$, e nel nostro caso $a = \frac{64}{64} = 1$; dunque il primo anno se ne costruì un miglio.

PROBLEMA 4°

Un vascello viaggiando alquanti giorni trascorre una linea di 1820 leghe, in modo, che dividendo il numero delle leghe trascorse nel secondo giorno, per quelle trascorse nel primo, e quelle del terzo, per quelle del secondo, e quelle del quarto, per quelle del terzo, e così di seguito, ne risulta un quoziente istesso; il primo giorno trascorse 5 leghe, e l'ultimo 1215; si desidera sapere il costante rapporto espresso dal quoziente.

In questa progressione conoscesi il termine sommatorio $S=1820$; il primo termine $a=5$, l'ultimo $u=1215$, cercasi q . Or (§ 10.) si ha $S = \frac{uq-a}{q-1}$, perciò $q = \frac{S-a}{S-u}$, e sostituendo i dati valori avrassi $q = \frac{1815}{605} = 3$; dunque il vascello dovrà ogni giorno triplicare il suo cammino.

De' logarithmi.

§ 16. Ridurre la moltiplica a somma, la divisione a sottrazione, l'elevazione a potenza a moltiplica, e l'estrazione della radice a semplice divisione, ecco ciò che forma l'utile scopo de' *logarithmi*; si sa (§ 8 l. 1^a), che in generale $a^m \times a^n = a^{m+n}$ che (l. 1^a § 3.) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, che (l. 2^a § 3.) $(a^m)^n = a^{mn}$ e (l. 2^a § 8.) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Se dunque troverassi il modo di ridurre due quantità A , B , in due altre a^m , a^n , il loro prodotto, il quoziente, la potenza e la radice potrà esprimersi colla somma, colla differenza, col prodotto e col quoziente degli esponenti di una conosciuta quantità; questa felice idea condusse Nepero a stabilire l'interessante teoria de' *logarithmi*.

Chiamisi per y una quantità qualunque, x il rispettivo esponente da darsi ad una data quantità a , per renderla eguale ad y , avrassi $y = a^x$, trattasi di ritrovare il valore di x corrispondente ad un dato valore di y . Or codesto correlativo valore appellasi *logaritmo di y*, e dinotasi con $\log. y = x$. Per la ragione istessa se avrassi $u = a^z$ sarà $\log. u = z$, la quantità conosciuta a chiamasi la *base de' logarithmi*.

Dunque in generale il logarithmo di un numero y, è quello esponente della base, al quale elevata ci dà il valore di y.

Così supposta $a=2$, ed $y=4$, sarà $\log. 4=2$, e supposto $y=8$ sarà $\log. 8=3$; e così cc.

Dunque il valore del logaritmo dipende da quello della prescelta base a .

Qualunque numero però si prende per la base a sarà $\log. 1=0$, dappoicchè nell'equazione generale $y=a^x$, supponendo $y=1$, per aver luogo la suddetta equazione (1. 2. § 2) per qualunque valore di a bisogna che sia l'esponente $x=0$, e perciò il logaritmo corrispondente ad y eguale 1, dunque avrassi $\log. 1=0$. Perciò essendo una frazione propria minore dell'unità, e lo zero il limite tra la positiva e negativa quantità, deducesene:

Che un rotto proprio avrà il suo logaritmo negativo.

La base a varia ne' differenti sistemi, ma qualunque sia il di lei valore siccome si ha sempre $a=a^1$, ne segue:

Che la base di un sistema avrà sempre per suo logaritmo l'unità.

§ 17. Essendo $y=a^x$, sarà $y^2=(a^x)^2=a^{2x}$ (1. 2. § 3.) dunque (§ prec.) $\log. y^2=2x$, e per l'istessa ragione $\log. y^5=5x$, ed in generale $\log. y^n=nx=n \log. y$.

Cioè il logaritmo di una potenza è eguale al logaritmo della quantità istessa moltiplicato per l'esponente della potenza, e perciò l'elevazione a potenza riducesi a semplice moltiplica.

Essendo $y = a^x$ sarà (1. 2. § 8.) $\sqrt[n]{y} = a^{\frac{x}{n}}$, perciò (§ prec.) $\log. \sqrt[n]{y} = \frac{x}{n} = \log. \frac{y}{n}$.

Dunque il logaritmo di un radicale è eguale al logaritmo della quantità istessa, diviso per l'esponente della radice, e perciò l'estrazione della radice riducesi a semplice divisione.

Supposto $y = a^x$ avrassi (§ preced.) $\log. y = x$, ed egualmente supposto $u = a^z$, si avrà $\log. u = z$. Ma $u \times y = a^z \times a^x = a^{x+z}$, dunque (§ prec.) $\log. uy = x + z$, $= \log. u + \log. y$:

Cioè il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma de' logaritmi de' fattori, perciò la moltiplica riducesi a semplice somma.

Sia in fine $\frac{u}{y} = \frac{a^z}{a^x} = a^{z-x}$, perciò (§ prec.)

$$\log. \left(\frac{u}{y} \right) = z - x = \log. u - \log. y; \text{ cioè:}$$

Il logaritmo di una frazione è eguale alla differenza de' logaritmi del numeratore, e del denominatore, e perciò la divisione riducesi a semplice sottrazione.

Dimostriamo col fatto codeste dedotte verità con fissare una particolare base.

Abbiassi la progressione equidifferente

$$\div 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : \text{ec.}$$

allora (§ 8 l. 4.^a) la quantità, che avrà successivamente co-

desti esponenti formerà una progressione equiquoziente, e supposta a la costante quantità, avrassi

$$\therefore a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : a^9 : a^{10} \text{ ec.}$$

Diamo ora un particolare valore alla base a , con supporla $= 2$ avrassi allora

$$\therefore 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7 : 2^8 : 2^9 : 2^{10} \text{ ec. ossia}$$

$$\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : \text{ec.}$$

Dunque nel sistema della base $a=2$, sarà per quanto si è detto $\log. 1=0$, $\log. 2=1$, $\log. 4=2$, $\log. 8=3$, $\log. 16=4$, $\log. 32=5$, $\log. 64=6$, $\log. 128=7$, $\log. 256=8$, $\log. 512=9$, ec.

Vogliasi ora il prodotto di 8×32 , per quanto si è detto, avrassi $\log. (8 \times 32) = \log. 8 + \log. 32 = 3 + 5 = 8$; ma 8 è il logaritmo di 256, sarà dunque $8 \times 32 = 256$; vogliasi in secondo luogo il quoziente tra 128, e 32, allora come si è dimostrato avrassi $\log. \frac{128}{32} = \log. 128 - \log. 32 = 7 - 5 = 2$, ma 2 è il logaritmo di 4, dunque sarà $\frac{128}{32} = 4$.

Cercasi ora la potenza quarta di 4, per quanto si è veduto avrassi $\log. 4^4 = 4 \log. 4$. Ma $\log. 4=2$, perciò $\log. 4^4 = 4 \times 2 = 8$, ma 8 è il logaritmo di 256, perciò $4^4 = 256$, vogliasi in fine la radice terza di 64, o sia $\sqrt[3]{64}$; per quanto si è detto si ha $\log. \sqrt[3]{64} = \frac{\log. 64}{3} = \frac{6}{3} = 2$, ma il numero corrispondente al logaritmo 2 è 4, dunque si avrà $\sqrt[3]{64} = 4$.

§ 18. La progressione equidifferente $\div 0:1:2:3:4:5:6$ ec. può anche appartenere, tra le tante altre, ad una progressione equiquoziente *decupla*, cioè nella quale si suppone la base $= 10$, ed allora avrassi

$\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7 \dots : 10^n$,
e perciò $\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000$ ec.; nel quale sistema come si vede, sarà sempre l'esponente zero il logaritmo dell'unità, ma però sarà 1 il logaritmo della base 10, 2 di 100, 3 di 1000, 4 di 10000, e così ec.

Con questo sistema cioè colla base $= 10$, sonosi calcolate le tavole de' logaritmi per tutti i numeri da 1 sino a 100000. Ma siccome qualunque progressione equiquoziente non ci dà ne' suoi corrispondenti esponenti, che una progressione equidifferente delle successive potenze, e perciò i successivi logaritmi; così colla tavola precedente non avendosi i logaritmi compresi tra 1 e 10, e fra 10 e 100, tra 100 e 1000, e così ec. e per la ragione istessa nella tavola della base $a=2$, non ottenendosi i logaritmi dei numeri frazionari compresi tra 1 e 2, e degli interi e frazionari tra 2 e 4, tra 4 e 8, e così di seguito, si è bisognato calcolare tai logaritmi per approssimazione inserendo nella progressione decupla tra 1 e 10, tra 10 e 100, tra 100 e 1000, e così di seguito de' medi proporzionali successivi, a questi corrisponderanno ne' successivi esponenti loro (§ 8. l. 4.^a) de' medi proporzionali equidifferenti, e saranno questi (§ antec.) gli approssimati logaritmi tra 1,

e 10, tra 10 e 100, tra 100 e 1000, e così di seguito.

Essendo nel sistema decuplo generalmente abbracciato $\log. 10 = 1$, e $\log. 1 = 0$, saranno gli esponenti della progressione, o sia i logaritmi de' numeri compresi tra 1 e 10, delle frazioni; gli esponenti poi della progressione, o sia i logaritmi de' numeri compresi tra 10 e 100, saranno le unità più delle consecutive frazioni; quei compresi tra 100 e 1000 avranno per loro logaritmi due unità aumentate da frazioni, e così di seguito.

Qualunque logaritmo dunque è composto da un numero intero, che chiamasi *caratteristica*, e da una frazione decimale detta *mantissa*. Così i numeri compresi tra 1 e 10, avranno per loro caratteristica zero, quei compresi tra 10 e 100, avranno 1 per loro caratteristica, e così in generale:

La caratteristica sarà di una unità minore delle cifre, che compongono il dato numero.

Così dalla caratteristica del dato logaritmo conoscerassi di quante cifre è composto il corrispondente numero, ed all'inversa, dal numero delle cifre del dato conoscerassi la caratteristica, così p. e. al logaritmo 3,915018, converrà un numero di 4 cifre, ed il numero 81850, avrà nel di lui logaritmo una caratteristica $= 4$; finalmente se dato il logaritmo vuolsi conoscere nelle tavole il corrispondente numero, ci verrà questo designato dalla mantissa corrispondente, e la data caratteristica c' indicherà il numero delle cifre da porsi tra gl'interi; così dato il logarit-

mo 2, 7603429, la mantissa c'indicherà le cifre 5758945, e la caratteristica 2 ci marcherà che saranno tre i numeri interi da distaccarsi, e perciò sarà il corrispondente numero $= 575, 8945$.

§ 19. Dipendendo (§ 16.) il valore del logaritmo da quello della prescelta base, seguene, che allo stesso numero possono corrispondere differenti logaritmi, a proporzione delle differenti basi. Or essendo due i sistemi abbracciati, o quello colla base $= 2$, o l'ultimo delle tavole detto *ordinario* colla base $= 10$; bisognerà dare il modo di trasformare il *logaritmo ordinario* di un numero, in quello la di cui base $= 2$, ed all' inversa.

A tal' uopo sia la base di un sistema $= a$, quella di un altro $= b$, sia N un numero, che colla base a avrà per logaritmo p , e colla base b per logaritmo q . Allora (§ 16.) avrassi $N = a^p$, $N = b^q$, perciò $a^{\frac{p}{q}} = b$, dunque $\log. b = \frac{p}{q}$.

Perciò la frazione $\frac{p}{q}$ ha un valore costante, cioè i due logaritmi dell' istesso numero, qualunque siasi, nei due differenti sistemi staranno in un costante rapporto.

Sia ora $N = 2$, sia p il logaritmo tabulare colla base $= 10$, sarà $\log. N = p = \log. 2 = 0, 30103$, sia q il logaritmo di 2 calcolato colla base $= 2$, sarà $q = \log. 2 = 1$. E sostituendo codesti valori avrassi $\frac{p}{q} = \frac{0, 30103}{1}$, perciò $q = \frac{p}{0, 30103}$, e verificando la divisione si avrà

$q = 3, 5219277 \times p$. Dunque se il logaritmo comune di 2 moltiplicherassi per 3, 5219277, si avrà allora il logaritmo del numero istesso per la base 2. Sia ora N , non più il 2, ma un numero qualunque, siano r , ed s i logaritmi di esso, r per la base $= a = 10$, s per la base $= b = 2$, allora avrassi $N = a^r$, $N = b^s$, perciò $b = a^{\frac{r}{s}}$, e $\log. b = \frac{r}{s}$. Ma sopra supposto $N = 2$, si ha $\frac{p}{q} = \log. b = \frac{0, 50103}{1}$, dunque $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{0, 50103}{1}$.

Perciò per qualunque siasi numero il rapporto dei logaritmi ne' due sistemi sarà l'istesso di quello corrispondente ai logaritmi del numero 2, e perciò dedurrassene, che se i logaritmi comuni si moltiplicano per 3, 5219277, si avranno allora i logaritmi colla base $= 2$.

Di più essendo $q = 3, 5219277 \times p$, sarà $p = \frac{q}{3, 5219277}$ cioè: *Sei logaritmi colla base $= 2$, si divideranno per 3, 5219277, avransi allora i logaritmi tabulari, ossia comuni.*

§ 20. Darem fine a sì interessante teoria colla soluzione di alcuni problemi ne' quali fassi uso de' logaritmi.

PROBLEMA 1°

Dato il primo termine $a = 1$, il quoziente $q = 2$, l'ultimo termine $u = 512$ di una progressione equiquoziente dedurre il numero n de' termini.

In questa inchiesta sarà n l'incognita, ma (l. 4. § 9.) si ha $a = \frac{u}{q^{n-1}}$, dunque nel nostro caso $1 = \frac{512}{2^{n-1}}$, perciò $2^{n-1} = 512$; or in codesta essendo l'incognita un esponente, non potrassi risolvere, che impiegando i logaritmi per cui si avrà (l. 4. § 17.) $(n-1) \log. 2 = \log. 512$; e perciò $n = 1 + \frac{\log. 512}{\log. 2}$, ed avrassi, cercando nelle tavole, $\log. 512 = 2, 70927$, $\log. 2 = 0, 30103$, perciò

$$n = 1 + \frac{2, 70927}{0, 30103} = 1 + 9 = 10$$

dunque il numero de' termini sarà 10.

PROBLEMA 2°

Un architetto vuol conoscere l'altezza di una torre.

Come si sa dalla geometria pratica, sceglierà primieramente una *base* alla di cui estremità collocheravvi il grafometro, e misurerà con esso l'angolo che fa la parte più elevata della torre coll'orizzonte. Sia dunque codesta base = 120 canne, sia il suddetto angolo = $70^\circ, 50'$, allora risulteranne un triangolo rettangolo, nel quale chiamando x la cercata altezza, e supposto il raggio = 1; per la trigonometria avrassi $1 : 120 :: \text{tang. } (70^\circ, 50') : x$, e perciò $x = 120 \times \text{tang. } (70^\circ, 50')$, dunque (§ 17.) $\log. x = \log. 120 + \log. \text{tang. } (70^\circ, 50')$. Or $\log. 120 = 2, 07918$; $\log. \text{tang. } (70, 50') = \log. \cot. (19^\circ, 50') = 0, 45085$, perciò sarà $\log. x = 2, 07918 + 0, 45085 = 2, 53003$. Or cercando nelle tavole il numero corrispondente a tale logaritmo avrassi $x = 339$.

Dunque la cercata altezza sarà di 539 canne, alla quale però bisognerà unire l'altezza del grafometro, che suole essere di 4 in 5 palmi.

PROBLEMA 3°

Un giuocatore incomincia il di lui giuoco con un zecchino, e sempre raddoppiando la sua posta vince 127 zecchini; si desidera sapere il numero delle poste.

In questo problema trattasi di una progressione equiquoziente, in essa conoscesi il primo termine $a=1$, il quoziente $q=2$, ed il termine sommatorio $S=127$, e cercasi il numero de' termini $n=x$. Or (l. 4. § 10.) (2^a) si ha $S=a \frac{(q^n-1)}{q-1}$, e per conseguenza $q^n = \frac{S(q-1)+a}{a}$, equazione che non puossi risolvere senza i logaritmi, perciò (§ 17.) $n \log. q = \log. [a + S(q-1)] - \log. a$ dunque

$$n = \frac{\log. (1+127) - \log. 1}{\log. 2}$$

ed essendo $\log. 1=0$, avrassi $x = \frac{\log. 128}{\log. 2}$. Ma $\log. 128 = 2,10721$, e $\log. 2 = 0,30103$, sarà $x = \frac{2,10721}{0,30103} = 7$; perciò il cercato numero delle poste sarà sette.

PROBLEMA 4°

Un agrimensore ha misurato la superficie di una foresta di 285 canne quadrate sul pendio di una montagna inclinata di 30°; fa d'uopo rapportarla ad un piano orizzontale.

A tale oggetto riflette, che l'altezza del pendio colla di lui superficie, ed il cercato piano orizzontale formano un triangolo rettangolo, la di cui ipotenusa sarà la data superficie, ed il cercato piano orizzontale il lato adiacente al dato angolo; dunque chiamando x il cercato piano, per la trigonometria avrassi $1 : 285 :: \coseno\ 30^\circ : x$, perciò $x = 285 \cos. 30^\circ$, ed applicandovi i logaritmi sarà $\log. x = \log. 285 + \log. \cos. 30^\circ$. Ma $\log. 285 = 2,45484$, $\log. \cos. 30^\circ = 9,93753$, perciò $\log. x = 12,39237$, e cercando nelle tavole il numero corrispondente a $2,39237$, troverassi 247 , dunque $x = 247$; perciò la foresta nel piano orizzontale occuperà uno spazio di 247 canne quadrate.

PROBLEMA 5°

Un usurario con 100 once di capitale l'aumenta ogni anno di un terzo; qual diverrà alla fine di 10 anni?

Sia $n = 100$, per la condizione, sarà dopo un anno $n + \frac{n}{3} = n \left(\frac{4}{3} \right)$; nel secondo anno sarà

$$n \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{1}{3} n \left(\frac{4}{3} \right) = n \left(\frac{16}{9} \right) = n \left(\frac{4}{3} \right)^2$$

per la ragione istessa nel terzo anno sarà $n \left(\frac{4}{3} \right)^3$, ed alla fine nel decimo anno, chiamando x il di lui aumentato capitale, sarà $x = n \left(\frac{4}{3} \right)^{10}$. Dovendo determinare x dovrebbsi ritrovare la decima potenza di $\frac{4}{3}$, ed indi mol-

tiplicarla per 100, cosa non molto facile, vi si arriverà però facilmente con i logaritmi; difatti

$$\log. x = \log. 100 + 10 \left(\log. \frac{4}{3} \right) = \log. 100 + 10 (\log. 4 - \log. 3).$$

Ma $\log. 4 = 0,60206$, $\log. 3 = 0,47712$, $\log. 100 = 2$, perciò $\log. x = 2 + 10 (0,12494) = 3,2494$. Ma a $3,2494$, corrisponde il numero 1776, dunque sarà $x = 1776$; cioè il capitale di onze 100 dopo 10 anni ascenderà ad onze 1776.

Saranno sufficienti questi cinque problemi per far vedere la somma utilità de' logaritmi nella calcolazione.

LEZIONE QUINTA

ED ULTIMA

*Teoria generale delle equazioni, e di quelle
di terzo grado.*

§ 1. Se una equazione non ci esprime, che l'eguaglianza de' due membri, ne segue, che trasportato il secondo nel primo, essa ridurrassi eguale a zero: così essendo $x = a$, sarà $x - a = 0$.

Or un' equazione dicesi *ordinata* quando posti tutti i termini nel primo membro nell' altro scrivesi zero. Noi supporremo sempre le equazioni ordinate.

In ogni determinata equazione, alla incognita dee corrispondervi un valore, che soddisfa la equazione; eadesto corrispondente valore appellasi *radice* della equazione, perciò sarà radice dell' equazione il valore dell' incognita, che rende quella eguale a zero: così nella equazione $x^3 + 2x^2 = 10x - 7$, sarà una delle radici $= 1$; dappoichè sostituendo tal valore ad x avrassi $1 + 2 - 10 + 7 = 0$. Siccome il valore di una incognita da soddisfare l' equazione può essere positivo o negativo, razionale o irrazionale, reale o immaginario, così la radice di una equazione può essere *positiva o negativa, razionale o irrazionale, reale o immaginaria*.

Abbiassi ora l'espressione $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)$; avrassi

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) = x^3 \pm x^2(a+b+c) \pm x(ab+ac+bc) + abc$$

E facendo l'istesso ragionamento, e supposti i successivi coefficienti di $x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} \dots x^{m-m} = A, B, C, \dots N$, generalmente un'equazione potrà esprimersi per

$$x^m \pm Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots \pm Cx^{m-m+1} + Nx^{m-m} = 0$$

dunque deducesene:

Che il primo membro di una equazione è il prodotto di più fattori semplici, che essa conterrà tutte le potenze dell'incognita da quella del suo grado sino alla prima inclusivamente, ed il numero de' suoi fattori eguaglierà il massimo esponente dell'incognita.

§ 2. Non essendo la radice, che il valore dell'incognita da soddisfare l'equazione, vale a dire da ridurla eguale a zero; ma nella generale equazione

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) \text{ ec.} = x^m \pm Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \pm \text{ec.}$$

qualunque de' fattori ridotto a zero, riduce a zero l'equazione, e per ridursi ciascun fattore a zero fa d'uopo, che l'incognita abbiavi un valore eguale e costante alla cognita; dunque il numero delle radici eguaglierà quello de' fattori; ma il numero de' fattori (§ prec.) eguaglia il grado massimo dell'incognita:

Dunque il numero delle radici di una equazione eguaglierà il grado della potenza dell'incognita.

Or codeste radici possono essere 1° *reali positive*, o *negative*; 2° *immaginarie positive*, o *negative*. Nel primo caso sarà $x \mp a = 0$, $x \mp b = 0$, $x \mp c = 0$. Nel secondo (1.2° § .7) $x \mp a\sqrt{-1} = 0$, $x \mp b\sqrt{-1} = 0$, $x \mp c\sqrt{-1} = 0$. Ma intanto bisogna ben guardarci di dedurre da codeste apparenti equazioni, che nel tempo istesso la medesima quantità x sia eguale a molte grandezze differenti a , b , c ; codeste equazioni, dice Alembert, altro non ci esprimono, che la proprietà, e natura di essi fattori di ridurre ogni uno di essi l'equazione a zero; dappoichè essendo la quantità proposta eguale a zero, bisogna che lo sia pure uno de' suoi fattori, così le suddette parziali equazioni altro non ci indicano, che l'equazione proposta è il prodotto di $x \mp a = 0$, per $x \mp b$, e per $x \mp c$; o pure di $x \mp b = 0$, per $x \mp a$, e per $x \mp c$; o in fine di $x \mp c = 0$ per $x \mp a$, o per $x \mp b$; vale a dire che facendo successivamente

$$x = \pm a, \text{ o } x = \pm b, \text{ o } x = \pm c$$

ogni uno di codesti fattori ridurrà l'equazione eguale a zero.

Or essendo $(x+a)(x+b)(x+c) \text{ ec.} = x^m + x^{m-1}(a+b+c) + x^{m-2}(ab+ac+bc) + \text{ec.} + abc = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.}$ ed $(x-a)(x-b)(x-c) \text{ ec.} = x^m - x^{m-1}(a+b+c) + x^{m-2} \times (ab+ac+bc \text{ ec.}) \dots \mp abc \text{ ec.} = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \text{ec.}$ deducesene:

Che se tutte le radici sono reali e negative, i termini dell'equazione saranno tutti positivi; se poi tutte

le radici saranno reali, e positivi i termini dell'equazione saranno alternativamente positivi e negativi.

Perciò dalla forma della serie de' termini di una equazione potrà conoscersi la natura delle di lei radici, ed all' inversa; passando poi alle radici immaginarie per le medesime darci un risultato reale bisogna, che sia il prodotto di un numero pari di fattori; dappoichè (l. 2.^a § 18) il prodotto di due quantità immaginarie è reale, e quello di una grandezza reale per una immaginaria, immaginario.

Dunque poichè le radici immaginarie in un prodotto reale sono sempre in numero pari, ne segue:

Che nella equazione di un grado impari saravvi almeno una radice reale.

Dalla proprietà, che ha la radice di ridurre a zero un'equazione potrassi facilmente conoscere se una quantità a è la radice di una equazione; ma vi è un altro mezzo dividendo la data equazione per $x-a$, giacchè nell'ipotesi, che sarà a una radice positiva di x , $x-a$ sarà un fattore dell'equazione, e perciò un divisore esatto di essa.

§ 5. Riandando (§ 1.) alla dedotta equazione

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c) = x^5 \pm x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) \pm abc$$

sarà

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)(x \pm d) = [x^5 \pm x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) \pm abc](x \pm d) = x^6 \pm x^5(a+b+c+d) + x^2(ab+ac+ad+bc+bd+dc) \pm x(abc+abd+acd+bcd) + abcd$$

Esupposto m l'esponente massimo, fatto l'istesso ragionamento avrassi

$$(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)(x \pm d) \text{ ec.} = x^m \pm x^{m-1}(a+b+c+d+\text{ec.}) \\ + x^{m-2}(ab+ac+ad+bc+bd+dc+\text{ec.}) \pm x^{m-3}(abc+abd \\ +acd+bcd+\text{ec.}) \dots \pm x^{m-m+1}(abcd \dots) + x^{m-m}(abcd \dots)$$

sarà dunque

$$A = \pm (a+b+c+d+\text{ec.})$$

$$B = (ab+ac+ad+bc+bd+cd+\text{ec.})$$

$$C = (abc+acd+abd+bcd+\text{ec.})$$

$$D = abcd + \text{ec.}$$

$$\text{ed in fine } N = a b c d \dots$$

Ma $A, B, C, D, \dots N$ ci esprimono le varie combinazioni delle differenti radici, e di più supposte le radici positive, avrassi $x-a=0$, $x-b=0$, e così ec. e nel caso di negative $x+a=0$, $x+b=0$, e così ec. dunque nell' ipotesi delle radici positive avrassi

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ ec.} = x^m - x^{m-1}(a+b+c+d+\text{ec.}) \\ + x^{m-2}(ab+ac+ad+bc+bd+dc+\text{ec.}) \\ - x^{m-3}(abd+acd+bcd+abc+\text{ec.}) \dots x^{m-m+1}(abcd+\text{ec.}) - abcd \text{ ec.}$$

Ecco una diretta dimostrazione della già, per induzione, dedotta legge progressiva de' coefficienti A, B, C, D , ec.

Nella generale equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \dots \pm Rx^{m-r} \mp T = 0$$

essendo m il grado della potenza sarà (§ 1.) m il numero de' fattori, perciò la generale sarà derivata dall'equazione

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \dots \text{ ec.} = 0$$

Fatta perciò la moltiplica di tutti questi fattori, resulteranne il primo membro della proposta generale equazione.

Or se si concepisce eseguita una tal moltiplica sarà facile il vedere, che ciascun termine del prodotto conterrà come moltiplicatore o il primo, o il secondo termine di ogni fattore, e quindi tutti i termini del prodotto si otterranno moltiplicando in tutti i modi possibili i primi termini in alcuni fattori, ed i secondi in tutti gli altri.

Di più non essendo un prodotto di più fattori, riguardo alla sua forma, che quello istesso di un fattore moltiplicato per un medesimo numero di volte per se stesso, colla differenza soltanto, che nel primo diversi saranno i fattori, nel secondo lo stesso, ne segue che il numero de' fattori in ciascun termine dovrà esser costante.

Or moltiplicando tutti gli x tra loro avrassi il primo termine x^m della generale equazione, e tra loro tutti i secondi termini, otterrassi l'ultimo $Z = a b c d \dots$ espresso per un numero m di fattori, dunque ciascun termine intermedio tra il primo, e l'ultimo dovrà essere il prodotto di un numero m di fattori. Or nel secondo termine Ax^{m-1} esprimendoci A , la combinazione di tutti i coefficienti di x^{m-1} , dovrà quest'ultimo per completare il numero m di fattori, esser moltiplicato per ciascun secondo termine de' successivi fattori, e perciò avrassi

$$\begin{aligned} Ax^{m-1} &= ax^{m-1} + bx^{m-1} + cx^{m-1} + dx^{m-1} + \text{ec.} \\ &= x^{m-1} (a+b+c+d+\text{ec.}) \end{aligned}$$

Passando al terzo termine Bx^{m-2} , contenendo un nu-

mero $m-2$ di moltiplicatore x , dovrà ciascun termine del coefficiente B essere il prodotto di x^{m-2} per altri due fattori da completare il costante numero m di fattori, e perciò dovrà x^{m-2} moltiplicarsi per i secondi termini dei successivi fattori presi a due a due, e variati in tutti i modi possibili, e perciò avrassi

$$Bx^{m-2} = x^{m-2}(ab) + x^{m-2}(ac) + x^{m-2}(ad) + x^{m-2}(bc) + x^{m-2}(bd) + x^{m-2}(cd) + ec.$$

$$\text{ossia } Bx^{m-2} = x^{m-2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd+ec.)$$

Considerando il quarto termine Cx^{m-3} , contenendo questo un numero $m-3$ di moltiplicatore x , per le ragioni addotte, dovrà ciascun termine del coefficiente C moltiplicarsi per i secondi termini de' successivi fattori presi a tre a tre, variati in tutte le maniere possibili, e perciò avrassi

$$Cx^{m-3} = x^{m-3}(abc) + x^{m-3}(abd) + x^{m-3}(acd) + x^{m-3}(bcd) + ec.$$

ossia $Cx^{m-3} = x^{m-3}(abc+adb+acd+bcd+ec.).$

Finalmente ragionando nel modo istesso il termine generale Rx^{m-r} contenendo un numero $m-r$ di moltiplicatore x , sarà il prodotto di x^{m-r} per un numero r de' secondi termini de' successivi fattori, combinazione, che ci verrà assegnata dal valore di r , completante il costante numero m di fattori perciò sarà $Rx^{m-r} = (abcd...ec.) x^{m-r}$.

Or sostituendo questi dedotti valori avrassi

$$\begin{aligned} x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \dots + Rx^{m-r} \pm T = \\ x^m - x^{m-1}(a+b+c+d+ec.) + x^{m-2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd+ec.) \\ - x^{m-3}(abc+adb+acd+bcd) \dots \pm x^{m-r}(abcd \dots + ec.) \mp abcd \dots \end{aligned}$$

Da codesta equazione, supposte le radici positive, dedurrassi:

I.° Che il coefficiente del secondo termine preso con segno contrario sarà la somma di tutte le radici.

II.° Che il coefficiente del terzo termine sarà la somma de' prodotti delle radici moltiplicate a due a due.

III.° Che il coefficiente del quarto termine preso con segno contrario, sarà la somma de' prodotti delle radici moltiplicate a tre a tre.

IV.° Che il coefficiente del termine ennesimo preso con segno contrario, se è pari, sarà la somma de' prodotti delle radici moltiplicate ad $(n-1)$ ad $(n-1)$.

V.° Finalmente l'ultimo termine soggetto come gli altri alla stessa legge sarà il prodotto di tutte le radici; se poi le radici saranno negative (§ 2.) tutti i termini saranno positivi.

§ 4. Applichiamo ciò, che si è generalmente dimostrato nei § 2. 3. ad alcune particolari equazioni. Abbiassi $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, primieramente essendo 3 il massimo esponente dell' incognita, saranno (§ 1.) tre i fattori, e per conseguenza tre le radici. Or dividendo questa equazione per $x-5$ avrassi

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 23x - 60}{x-5} = x^2 + 7x + 12$$

e dividendola per $x+4$, si avrà

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 23x - 60}{x+4} = x^2 - 2x - 15$$

ed infine dividendola per $x+3$, avrassi

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 23x - 60}{x+3} = x^2 - x - 20$$

Dunque essendo $x-5$, $x+4$, $x+3$ esatti divisori della data equazione, saranno (§ 2.) $+5$, -4 , -3 le radici, ossia i tre valori di x , perciò (§ 3.) la loro somma dovrà darci il coefficiente 2 del secondo termine, prendendolo con segno contrario, poichè una radice è positiva, difatti $5-4-3=-2$, perciò coefficiente $=2$, il coefficiente del terzo termine dovrà contenere la somma delle radici prese a due a due, e perciò $(5 \times -4) + (5 \times -3) + (-4 \times -3) = -23$. Finalmente l'ultimo termine dovrà contenere il prodotto di tutte le radici, e per essere nel nostro caso pari, preso con segno contrario, e difatti $(5 \times -4 \times -3) = 60$, perciò ultimo termine $= -60$.

Abbiassi l'equazione $x^3 - 19x + 30 = 0$, dessa per quanto si è detto avrà tre fattori, perciò tre radici. Or dividendola per $x-2$, $x-3$, $x+5$, ed avendosi degli esatti quozienti le tre radici saranno 2, 3, -5 , dunque sarà il secondo termine $x^2(2+3-5)=0$.

Il terzo termine $x(6-10-15)=-19x$, e l'ultimo sarà $2 \times 3 \times -5 = -30$, ed essendo pari sarà col segno cambiato, perciò $= 30$.

Riflettendo in questa equazione, che non ha secondo termine, dall'altra parte considerando, che $2+3-5=0$, se ne dedurrà, che la suddetta equazione manca di secondo termine, perchè nella somma delle radici (la quale presa con segno contrario forma il coefficiente del secondo termine) la totalità delle radici positive è uguale a quella delle negative.

Per la ragione istessa dedurrassene, che se la somma de' prodotti delle radici positive, prese a due a due, egualgerà quella de' prodotti negativi a due a due, l'equazione non avrà terzo termine, e così di seguito.

§ 5. Ripresa la generale dedotta equazione (lez. v. § 1.) essa ridurrassi ad $N+Cx+Bx^2+Ax^3 \dots + Vx^m=0$, equazione in cui tutte le radici saranno negative (lez. v. § 2.)

Or supponendo in questa equazione, che i coefficienti siano incogniti ed indeterminati e perciò le radici che ne dipendono, allora l'equazione annullerassi termine per termine, cioè ciascun termine da se diverrà $=0$; ed ecco il principio sul quale poggia il metodo de' coefficienti indeterminati. Di fatti dovendo questa equazione verificarsi, qualunque diasi valore ad x , dovrà anche esser vera supponendo $x=0$. Ma in tal caso avrassi $N=0$, dunque l'equazione suddetta diverrà $Cx+Bx^2+Ax^3 \dots + Vx^m=0$; e dividendo tutto per x avrassi

$$C+Bx+Ax^2 \dots + Vx^{m-1}=0$$

Ma supposto come sopra $x=0$, sarà $C=0$, e l'equazione

generale ridurrassi a $Bx + Ax^2 + \dots + Vx^{m-1} = 0$, e per la ragione istessa sarà $B=0$, e facendo in seguito il medesimo ragionamento troverassi eziandio $A=0$, ec. $V=0$.

Lo stesso verificasi supposta una equazione le di cui radici fossero positive; dunque dedurrassene:

Che se una equazione di un grado qualunque ordinata dovrà verificarsi qualunque si fosse il valore dell' incognita, ciascuno de' suoi coefficienti dovrà essere eguale allo zero.

Se dunque avrassi l' equazione

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}$$

la quale debba essere vera per qualsivoglia valore di x , ordinando, e riducendola avrassi

$$(A-a) + (B-b)x + (C-c)x^2 + (D-d)x^3 + \text{ec.} = 0$$

Ma per quanto si è detto, essendo zero il secondo membro, i coefficienti di tutte le diverse potenze dell' x , devono esser zero; dunque avrassi $A-a=0$, $B-b=0$, $C-c=0$, $D-d=0$, perciò $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, e così ec. cioè:

Il coefficiente di una potenza qualunque dell' x , nel primo membro, eguaglierà il coefficiente della potenza medesima nel secondo membro.

Se dunque supponrassi A, B, C, D , ec. delle quantità *indeterminate* ed a, b, c, d ec. delle *determinate* mediante le ultime potranno determinare le prime; ed ecco ciò, che costituisce il *metodo de' coefficienti indeterminati*, metodo, che come vedrassi, nella introdu-

zione all' analisi, ci darà il mezzo di ritrovare lo sviluppo delle funzioni in serie.

§ 6. Quale una delle infinite applicazioni dello ubertoso metodo de' coefficienti indeterminati, dimostriamo direttamente la legge dello sviluppo del binomio $(a+x)^m$ supposta la potenza m , o intera o frazionaria.

Or essendo $(a+x)^m$ un prodotto di un numero m di fattori uguali, i numeri della serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... m formeranno i successivi esponenti dell' incognita x , e nel nostro caso le successive potenze; trattasi dunque di determinare i corrispondenti coefficienti A, B, C, D, E , ec., dunque avrassi

$$(a+x)^m = Ax^0 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ec.}$$

$$\text{o sia } (a+x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ec.}$$

Dovendosi questa equazione verificare per qual si voglia valore di x , dovrà aver luogo supponendo $x=0$. Or fatta questa supposizione, avrassi $A=a^m$, *valore del primo termine del cercato sviluppo*.

Supposta ora m una potenza intera, facciasi $a+x=y$, perciò $(a+x)^m = y^m$, ed $x=y-a$, e sostituendo tai valori l'ultima formola ridurrassi ad

$$y^m = a^m + B(y-a) + C(y-a)^2 + D(y-a)^3 + E(y-a)^4 + F(y-a)^5 + \text{ec.}$$

o sia trasportato nel primo membro il termine a^m , ed indi divisa l'intera equazione per $y-a$ avrassi

$$\frac{y^m - a^m}{y - a} = B + C(y-a) + D(y-a)^2 + E(y-a)^3 + F(y-a)^4 + \text{ec.}$$

Or essendo, come potrà vedersi,

$$(y^{m-1} + ay^{m-2} + a^2y^{m-3} + a^3y^{m-4} + a^4y^{m-5} + \text{ec.} + a^{m-2}y + a^{m-1})(y-a) \\ = y^m - a^m, \text{ sarà perciò}$$

$$\frac{y^m - a^m}{y - a} = y^{m-1} + ay^{m-2} + a^2y^{m-3} + a^3y^{m-4} + \text{ec.} + a^{m-2}y + a^{m-1}$$

dunque sarà

$$B + C(y-a) + D(y-a)^2 + E(y-a)^3 + F(y-a)^4 + \text{ec.} \\ = y^{m-1} + ay^{m-2} + a^2y^{m-3} + a^3y^{m-4} + \text{ec.} + a^{m-2}y + a^{m-1}$$

Or dovendo la soprapposta serie verificarsi per qualunque valore di x , avrà eziandio luogo supposto $x=0$, ma essendo $y=a+x$, sarà in questo caso $y=a$, e perciò codesta ultima equazione ridurrassi a

$$B = a^{m-1} + a^{m-1} + a^{m-1} + \text{ec.} + a^{m-1} + a^{m-1}$$

Ma il secondo membro di quest' ultima equazione, altro non è, che la quantità a^{m-1} ripetuta m volte (per esservi oltre y^{m-1} , ay^{m-2} , ec. a^{m-1} mancante dell' y), dunque avrassi $B = ma^{m-1}$, e dovendo il valore di B , per l' addotta ragione, conservarsi sempre lo stesso, sotto tutti i valori di x , ne segue, che il *coefficiente* B del secondo termine sarà uguale ad ma^{m-1} .

Per determinare gli altri coefficienti C, D, E, F , ec. supposta come sopra $a+x=y$, ed aggiungendo a' due membri un aumento *indeterminato* z avrassi $a+x+z=y+z$,

perciò $(a+x+z)^m = (y+z)^m$. Ma essendo

$$(a+x)^m = A + Bx + Cx^2 + \text{ec.}$$

ed essendo nel nostro caso x aumentata da z avrassi perciò

$$(a+x+z)^m = A + B(x+z) + C(x+z)^2 + D(x+z)^3 + E(x+z)^4 + F(x+z)^5 + \text{ec.}$$

Ma $a+x=y$, dunque quest'ultima ridurrassi ad

$$(y+z)^m = A + B(x+z) + C(x+z)^2 + D(x+z)^3 + E(x+z)^4 + F(x+z)^5 + \text{ec.}$$

Ma per quanto si è dimostrato

$$(y+z)^m = y^m + my^{m-1}z + \text{ec.} \quad (x+z)^2 = x^2 + 2xz + \text{ec.}$$

$$(x+z)^3 = x^3 + 3x^2z + \text{ec.} \quad (x+z)^4 = x^4 + 4x^3z + \text{ec.}$$

$$(x+z)^5 = x^5 + 5x^4z + \text{ec.}$$

dunque sostituendo ta' valori nell'ultima formola $(y+z)^m = \text{ec.}$ avrassi

$$y^m + my^{m-1}z + \text{ec.} = A + B(x+z) + C(x^2 + 2xz + \text{ec.}) + D(x^3 + 3x^2z + \text{ec.}) + E(x^4 + 4x^3z + \text{ec.}) + F(x^5 + 5x^4z + \text{ec.}) + \text{ec.}$$

Or verificate le moltiplicazioni, e riducendo sotto il comune fattore z avrassi

$$y^m + my^{m-1}z + \text{ec.} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ec.} + (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ec.})z + \text{ec.}$$

Ma dall'altra parte essendo $y = a+x$, $(a+x)^m$ diverrà y^m , perciò avrassi

$$y^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ec.}$$

dunque sottraendo questa dall' ultima dedotta formola avrassi

$$\begin{aligned} y^m + my^{m-1}z + \text{ec.} - y^m &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 \\ &+ (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ec.})z + \text{ec.} \\ &- (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}) \end{aligned}$$

e riducendo avrassi

$$my^{m-1}z + \text{ec.} = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ec.})z + \text{ec.}$$

Or essendo z una indeterminata, quest' ultima equazione dovrà verificarsi qualunque siasi il valore di z , perciò dividendo per z , ed indi fatto $z = 0$ avrassi

$$my^{m-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4$$

Or moltiplicando questa per $y = a + x$, si avrà

$$my^m = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ec.})(a + x)$$

Ed effettuando la moltiplica, e riducendo sotto i comuni fattori si avrà

$$\begin{aligned} my^m &= aB + (2aC + B)x + (3aD + 2C)x^2 + (4aE + 3D)x^3 \\ &+ (5aF + 4E)x^4 + \text{ec.} \end{aligned}$$

Ma essendo $y^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ec.}$

sarà $my^m = mA + mBx + mCx^2 + mDx^3 + mEx^4 + mFx^5 + \text{ec.}$

perciò avrassi

$$\begin{aligned} aB + (2aC + B)x + (3aD + 2C)x^2 + (4aE + 3D)x^3 + (5aF + 4E)x^4 + \text{ec.} \\ = mA + mBx + mCx^2 + mDx^3 + mEx^4 + mFx^5 + \text{ec.} \end{aligned}$$

Dunque (§ 5.) avransi le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} aB &= mA, \quad 2aC + B = mB, \quad 3aD + 2C = mC, \quad 4aE + 3D = mD, \\ 5aF + 4E &= mE, \text{ e così ec., e perciò si avrà } B = \frac{mA}{a}, \end{aligned}$$

$$C = \frac{(m-1)B}{2a}, D = \frac{C(m-2)}{3a}, E = \frac{D(m-3)}{4a}, F = \frac{E(m-4)}{5a}, \text{ e così ec.}$$

Ma $A = a^m$, $B = ma^{m-1}$, dunque sostituendo ta' valori avrassi

$$C = \frac{m(m-1)}{2a} a^{m-1} = \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}$$

$$D = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3a} a^{m-2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3}$$

$$E = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4a} a^{m-3} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4}$$

e così di seguito, perciò nella formola premessa

$$(a+x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.}$$

sostituendo i dedotti valori de' coefficienti indeterminati, A, B, C, D, E , ec. avrassi

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} x^3 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} x^4 + \text{ec.}$$

formola già da noi nella lezione seconda per osservazione dedotta.

§ 7. Sia ora in $(a+x)^m$, $m = \frac{h}{k}$, e per conseguenza il binomio elevato ad una potenza frazionaria, trattasi di ritrovarne lo sviluppo. Essendo $m = \frac{h}{k}$, la formola del (§ antec.) con coefficienti indeterminati diverrà

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + F'x^5 + \text{ec.}$$

farà d'uopo determinare i detti coefficienti indeterminati A', B', C', D', E', F' , ec. nell'ipotesi di $m = \frac{h}{k}$, per ciò

eseguire rifletterassi, che le equazioni $B = \frac{mA}{a}$,
 $C = \frac{(m-1)}{2a} B$, ec. del § prec. ci presentano una esatta
 derivazione del secondo dal primo, del terzo dal secondo,
 e così ec.

Ma questa derivazione si è dedotta, ritrovando pria
 il valore de' due primi coefficienti indeterminati A , B ,
 bisogna dunque in questa seconda ricerca volendo seguire
 l'istesso metodo, incammarci per la medesima calcata strada,
 con pria determinare i valori di A' , e B' ; per determi-
 nare il primo, rifletterassi, che nella formola

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = A' + B'x + C'x^2 + \text{ec.}$$

dovendoci x rappresentare qualunque valore, la formola sarà
 vera, anche nel caso di $x=0$, e perciò avrassi $a^{\frac{h}{k}} = A'$.
 Per dedurre il valore di B' , per maggior concisione, nella
 suddetta formola facciasi $B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{ec.} = X$, al-
 lora ridurrassi ad $(a+x)^{\frac{h}{k}} = A' + X (= a^{\frac{h}{k}} + X)$ perciò sarà
 $(a+x)^{\frac{h}{k}} = (A' + X)^{\frac{h}{k}}$. Ma (§ preced.)

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} + h a^{\frac{h}{k}-1} x + \frac{h(h-1)}{2} a^{\frac{h}{k}-2} x^2 + \text{ec. ed}$$

$$(A' + X)^{\frac{h}{k}} = A'^{\frac{h}{k}} + \frac{h}{k} A'^{\frac{h}{k}-1} X + \frac{k(k-1)}{2} A'^{\frac{h}{k}-2} X^2 + \text{ec.}$$

E fatto per brevità $\frac{h(h-1)}{2} a^{\frac{h}{k}-2} = r$, e

$$\frac{k(k-1)}{2} A'^{\frac{h}{k}-2} = R, \text{ avrassi}$$

$$(a+x)^h = a^h + ha^{h-1}x + rx^2 + \text{cc.}$$

$$\text{ed } (A'+X)^k = A'^k + kA'^{k-1}X + RX^2 + \text{cc.}$$

Or sostituendo ad A' il suo valore $= a^{\frac{h}{k}}$, e ad X il suo $= B'x + C'x^2 + D'x^5 + \text{cc.}$ avrassi

$$(A'+X)^k = (a^{\frac{h}{k}})^k + k(a^{\frac{h}{k}})^{k-1}(B'x + C'x^2 + D'x^5 + \text{cc.}) + R(B'x + C'x^2 + \text{cc.})^2 + \text{cc.} = a^h + ka^{\frac{hk-h}{k}}B'x + \text{cc.}$$

Dunque essendo $(a+x)^h = (A'+X)^k$, sostituendo in questa i già dedotti valori, avrassi

$$a^h + ha^{h-1}x + \text{cc.} = a^h + ka^{\frac{hk-h}{k}}B'x + \text{cc.}$$

Dunque per il metodo de' coefficienti indeterminati (§ 5.) avrassi le seguenti equazioni

$$a^h = a^h, ha^{h-1} = ka^{\frac{hk-h}{k}}B', \text{ e così ec. dunque}$$

$$B' = \frac{ha^{h-1}}{ka^{\frac{hk-h}{k}}} = \frac{h}{k}a^{h-1-\frac{hk-h}{k}} = \frac{h}{k}a^{\frac{hk-k-hk+h}{k}} = \frac{h}{k}a^{\frac{h-k}{k}}$$

$$\text{ed in fine avrassi } B' = \frac{h}{k}a^{\frac{h}{k}-1}.$$

Determinato il valore de' due primi *coefficienti indeterminati* A' , B' , usando l'identifico metodo del § prec., e fatti gl'istessi ragionamenti, eseguite le medesime operazioni, con solamente supporre $m = \frac{h}{k}$, avrassi in fine la finale equazione

$$\frac{h}{k}A' + \frac{h}{k}B'x + \frac{h}{k}C'x^2 + \frac{h}{k}D'x^3 + \frac{h}{k}E'x^4 + \text{ec.} =$$

$$aB' + (2aC' + B')x + (3aD' + 2C')x^2 + (4aE' + 5D')x^3 + \text{ec.}$$

Dunque per il metodo de' coefficienti indeterminati (§ 5.) si avranno le seguenti equazioni

$$\frac{h}{k}A' = aB', \quad 2aC' + B' = \frac{h}{k}B', \quad 5aD' + 2C' = \frac{h}{k}C',$$

$$4aE' + 5D' = \frac{h}{k}D', \quad 5aF' + 4aE' = \frac{h}{k}E', \text{ e così ec.}$$

$$\text{perciò } B' = \frac{h}{k} \frac{A'}{a}, \quad C' = \frac{B' \left(\frac{h}{k} - 1 \right)}{2a}, \quad D' = \frac{C' \left(\frac{h}{k} - 2 \right)}{5a},$$

$$E' = \frac{D' \left(\frac{h}{k} - 3 \right)}{4a}, \text{ e così ec. Ma } A' = a^{\frac{h}{k}} B' = \frac{h}{k} a^{\frac{h}{k}-1}$$

Dunque sostituendo tai valori si avrà

$$C' = \frac{\frac{h}{k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right)}{2a} a^{\frac{h}{k}-1} = \frac{h}{2k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) a^{\frac{h}{k}-2}$$

$$D' = \frac{\frac{h}{k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) \left(\frac{h}{k} - 2 \right)}{2 \cdot 5a} a^{\frac{h}{k}-2} = \frac{\frac{h}{k} \left(\frac{h}{k} - 1 \right) \left(\frac{h}{k} - 2 \right)}{2 \cdot 5} a^{\frac{h}{k}-5}$$

e così del resto.

Facendo dunque la sostituzione de' già determinati valori di $A', B', C', D', E', \text{ ec.}$ nell'equazione

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{ec.}$$

e riducendo in essa formola i coefficienti e gli esponenti

de' successivi termini avrassi in fine

$$(a+x)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} + \frac{h}{k} a^{\frac{h-k}{k}} x + \frac{h}{k} \left(\frac{h-k}{2k} \right) a^{\frac{h-2k}{k}} x^2 \\ + \frac{h(h-k)(h-2k)}{k \cdot 2k \cdot 3k} a^{\frac{h-3k}{k}} x^3 + \text{cc.}$$

formola da noi dedotta per supposizione nella lezione seconda.

Trasformazione delle equazioni.

§ 8. **T**rasformare una equazione altro non significa, che ridurla in un'altra, le di cui radici soffrano un cambiamento, o in diminuzione, o in augumento.

A tale uopo riflettendo (§ 1.) sulla generale equazione $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \dots \pm N = 0$ si vedrà che potrassi trasformare in un'altra, le radici della quale siano eguali a quella della proposta moltiplicate o divise per una indeterminata quantità h , o pure in un'altra, in cui le radici positive, conservando il loro valore, divengono negative, e queste positive, o finalmente in una seconda, che abbia per radici quelle della proposta accresciute o diminuite dall'indeterminata h .

Or per la prima trasformazione farassi $x = \frac{y}{h}$, perciò sostituendo tal valore la generale diverrà

$$\frac{y^m}{h^m} - \frac{Ay^{m-1}}{h^{m-1}} + \frac{By^{m-2}}{h^{m-2}} - \frac{Cy^{m-3}}{h^{m-3}} + \frac{Dy^{m-4}}{h^{m-4}} \dots \pm N = 0$$

e moltiplicandola per h^m avrassi

$$y^m - Ah y^{m-1} + B h^2 y^{m-2} - C h^3 y^{m-3} + D h^4 y^{m-4} \dots \pm N h^m = 0$$

Ma essendo $x = \frac{y}{h}$, sarà $y = h x$, cioè

Le radici della trasformata saranno eguali a quelle della proposta moltiplicate per h.

Nel caso della divisione farassi $x = h y$, perciò fatte le stesse sostituzioni avrassi

$$y^m h^m - A y^{m-1} h^{m-1} + B y^{m-2} h^{m-2} - C y^{m-3} h^{m-3} \\ + D y^{m-4} h^{m-4} \dots \pm N = 0$$

e dividendo per h^m , otterrassi

$$y^m - \frac{A y^{m-1}}{h} + \frac{B y^{m-2}}{h^2} - \frac{C y^{m-3}}{h^3} + \frac{D y^{m-4}}{h^4} \dots \pm \frac{N}{h^m} = 0$$

Ma essendo $x = h y$ sarà $y = \frac{x}{h}$, cioè

Le radici della trasformata saranno uguali a quelle delle proposte divise per h.

Dunque considerando il premesso processo, conchiuderassi:

Che volendo trasformare una generale equazione in modo che le di lei radici fossero eguali a quelle della data, moltiplicate o divise per una indeterminata qualunque h, bisognerà nel primo caso moltiplicare rispettivamente tutti i termini della data per la progressione equiquoziente $1 : h : h^2 : h^3 : h^4$ ec.; e nel secondo caso rispettivamente per la medesima progressione dividerli.

Sia ora $h = \frac{L}{K}$, allora la trasformata nel caso della moltiplica ridurrassi ad

$$y^m - A \frac{L}{K} y^{m-1} + B \frac{L^2}{K^2} y^{m-2} - C \frac{L^3}{K^3} y^{m-3} + D \frac{L^4}{K^4} y^{m-4} \dots \pm \frac{NL^m}{K^m} = 0$$

e nel caso della divisione avrassi

$$y^m - A \frac{K}{L} y^{m-1} + B \frac{K^2}{L^2} y^{m-2} - C \frac{K^3}{L^3} y^{m-3} + D \frac{K^4}{L^4} y^{m-4} \dots \pm \frac{NK^m}{L^m} = 0$$

Dunque essendo nel primo caso $x \left(= \frac{y}{h} \right) = \frac{yK}{L}$, e perciò $xL = yK$, ed $x:y::K:L$, se ne ricava, che

In essa le radici della data staranno a quelle della trasformata :: K : L, come il denominatore del chiesto fattore frazionaria al di lui numeratore.

Ed essendo nel secondo $x = (hy) = \frac{Ly}{K}$, è perciò $Kx = Ly$, ed $x:y::L:K$, deducesene:

Che le radici della data staranno a quelle della trasformata, come L : K, come il numeratore del chiesto fattore frazionario al di lui denominatore.

In secondo luogo trasformerassi la generale equazione suddetta in un' altra in cui le radici cambiano di segno facendo, nella data

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \dots \pm N = 0,$$

$x = -y$, e sostituendo avrassi

$$-y^m + Ay^{m-1} - By^{m-2} + Cy^{m-3} - Dy^{m-4} \dots \pm N = 0$$

Equazione che per essere $x = -y$, sarà la data colla chiesta trasformazione.

§ 9. Vogliasi in fine una terza trasformazione in modo, che le radici della trasformata siano eguali a quelle della proposta, diminuite o accresciute di h . A tale uopo ripresa la generale equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \dots \pm N = 0,$$

ed in essa farassi $x = h + y$, dunque ridurrassi ad

$$(y+h)^m - A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2} - C(y+h)^{m-3} \\ + D(y+h)^{m-4} \dots \pm N = 0$$

$$\text{Ma } (y+h)^m = y^m + my^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} h^2 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} y^{m-3} h^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} y^{m-4} h^4 + \text{ec.}$$

$$-A(y+h)^{m-1} = -Ay^{m-1} - (m-1)Ay^{m-2}h \\ - \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ay^{m-3}h^2 - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} Ay^{m-4}h^3 - \text{ec.}$$

$$B(y+h)^{m-2} = By^{m-2} + (m-2)By^{m-3}h + \frac{(m-2)(m-3)}{2} By^{m-4}h^2 + \text{ec.}$$

$$-C(y+h)^{m-3} = -Cy^{m-3} - (m-3)Cy^{m-4}h - \text{ec.}$$

e riducendo tutti i termini ne' loro comuni fattori

$y^m, y^{m-1}, y^{m-2}, y^{m-3}, y^{m-4}$ ec. avrassi

$$\begin{aligned}
& y^m + (mh - A)y^{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{2} h^2 - (m-1)Ah + B \right) y^{m-2} \\
& + \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} h^3 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^2 + (m-2)Bh - C \right) y^{m-3} \\
& + \left(\frac{(m-2)(m-3)}{2} Bh^2 - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} Ah^3 - (m-3)Ch \right. \\
& \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} h^4 \right) y^{m-4} + \text{ec.} = 0
\end{aligned}$$

Quest' ultima dedotta formola sarà la chiesta trasformata in cui le radici di essa eguaglieranno quelle della data diminuite della quantità h .

Di fatti essa risultando dalla primitiva

$$\begin{aligned}
(y+h)^m - A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2} - C(y+h)^{m-3} \\
+ D(y+h)^{m-4} \dots \pm N = 0
\end{aligned}$$

ed essendo $x = y + h$, e perciò $y = x - h$, sostituendovi codesto valore di y avrassi

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - \text{ec.} \dots \pm N = 0$$

la generale equazione data.

Se poi vorrassi la trasformata in modo da essere le sue radici eguali a quelle della data aumentate dalla quantità h , allora farassi $x = y - h$, o per dir meglio nella dedotta formola cambierassi h in $-h$, per cui ridurrassi ad

$$\begin{aligned}
& y^m - (mh + A)y^{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{2} h^2 + (m-1)Ah + B \right) y^{m-2} \\
& + \left(\frac{-m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} h^3 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^2 - (m-2)hB - C \right) y^{m-3} \\
& + \left(\frac{(m-2)(m-3)}{2} Bh^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3} Ah^3 + (m-3)Ch \right. \\
& \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} h^4 \right) y^{m-4} + \text{ec.} = 0
\end{aligned}$$

formola generale che esprimeci la data trasformata in un'altra equazione, le di cui radici saranno eguali a quelle della data aumentate dall' indeterminata h .

Difatti essa risulta facendo, nella primitiva, $x=y-h$, per cui si ha

$$\begin{aligned}
& (y-h)^m - A(y-h)^{m-1} + B(y-h)^{m-2} - C(y-h)^{m-3} \\
& + D(y-h)^{m-4} \dots \pm N = 0
\end{aligned}$$

nella quale sostituendo il valore di $y=x+h$, e riducendola, risulteranne la data; di essa presentiamone un'applicazione, con trasformare l' equazione $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$, in un'altra che abbia le medesime radici, aumentate però di una unità; paragonando questa ultima colla generale equazione, sarà nel nostro caso

$$m=4, A=2, B=3, C=4, N=5, h=1$$

Or sostituendo codesti valori nell' ultima generale dedotta formola avrassi

$$y^4 - 6y^3 + \left(\frac{4 \times 3}{2} + 6 + 3\right)y^2 + \left(\frac{-4 \times 3 \times 2}{6} - \frac{5 \times 2 \times 2}{2} - 6 - 4\right)y \\ + \left(\frac{2 \times 3}{2} + \frac{5 \times 2 \times 2}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{24} + 4\right)y^0 + 5 = 0$$

$$\text{o sia } y^4 - 6y^3 + 15y^2 - 20y + 15 = 0.$$

§ 10. Ripresa ora la dedotta generale formola sì nel primo che nel secondo caso avrassi

$$y^m \pm (mh \mp A)y^{m-1} + \left(\frac{m(m-1)}{2}h^2 \mp (m-1)Ah + B\right)y^{m-2} \\ \pm \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}h^3 \mp \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2 + (m-2)Bh \mp C\right)y^{m-3} \pm \text{cc.}$$

I segni superiori indicano h positivo, e perciò $x > y$; gli inferiori h negativo, e perciò $x < y$.

Or se in essa supponessimo $mh \mp A = 0$, allora di essa formola svanirà il secondo termine. Vediamo dunque qual deve essere il valore di h per ciò accadere. Nel primo caso avrassi $h = \frac{A}{m}$, e nel secondo $-h = \frac{A}{m}$, perciò nel primo essendo $x = y + h$, avrassi $x = y + \frac{A}{m}$. Nel secondo essendo $x = y - h$ sarà $x = y - \frac{A}{m}$; dunque sì nell' uno che nell' altro caso deducesene:

Che si toglie da un' equazione il secondo termine con dividere il coefficiente di esso per l' esponente massimo della data equazione, ed unendolo con segno contrario del suddetto coefficiente A alla nuova incognita.

Così se dalla equazione $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, vorrassi eliminare il secondo termine; essendo nel nostro caso $m=3$, $A=-6$, sarà $h = -\frac{6}{3} = -2$, dunque farassi $x=y+2$, e fatte le sostituzioni avrassi

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 4(y+2) - 7 = 0$$

ed effettuando lo sviluppo, e riducendo avrassi in fine $y^3 - 8y - 15 = 0$, equazione senza secondo termine.

Della maniera istessa se dalla equazione $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, vorrassi far svanire il secondo termine, essendo nel nostro caso $m=4$, $A=2$, sarà l'indeterminata $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, dunque farassi $x = y - \frac{1}{2}$, e perciò la data equazione trasformerassi in $(y - \frac{1}{2})^4 + 2(y - \frac{1}{2})^3 - 4 = 0$.

Or effettuando l'accennato sviluppo, e fatte le necessarie riduzioni, avrassi la trasformata $y^4 - 6y^2 + 8y - 67 = 0$, equazione senza secondo termine.

Delle equazioni di terzo grado.

§ 11. Ripresa la generale equazione (§ 1.)

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \dots \pm N = 0$$

Se in essa supporrassi $m=3$, l'istessa ridurrassi ad $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, e trasformandola (§ prec.) per così far svanire il secondo termine, sarà nel nostro caso

$h = -\frac{A}{3}$, e perciò fatto $x = y + \frac{A}{3}$, avrassi una generale equazione di terzo grado senza secondo termine.

Dunque ogni equazione di terzo grado potrà rappresentarsi per un'altra, la di cui incognita è elevata solamente al terzo, ed al primo grado.

Perciò generalmente possiamo esprimerla per la generale equazione $x^3 \pm qx \mp r = 0$.

Or possono accadere due casi, 1° che il coefficiente di x sia uguale a zero, 2° che abbia un valore qualunque; esaminiamo la prima ipotesi, per indi passare alla seconda.

Sia dunque $q = 0$ avrassi allora $x^3 \mp r = 0$; dunque sarà $x = \pm \sqrt[3]{r}$, perciò supposto sopra r negativo, sarà una di lei radice $\sqrt[3]{r}$. Ma (§ 2.) il numero delle radici di una equazione eguagliando il grado della potenza della incognita, ne segue, che nel nostro caso la ridotta equazione aver dee due altre radici, ed essendo una di esse $\sqrt[3]{r}$, sarà (§ 2.) la data equazione divisibile per $x - \sqrt[3]{r}$; ed effettuando questa divisione avrassi

$$\frac{x^3 - r}{x - \sqrt[3]{r}} = x^2 + x\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r}^2 = 0$$

Essendo poi quest'ultima un'equazione di secondo grado, risolvendola con i metodi ordinari, avrassi pria

$$x^2 + x\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r}^2 = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{r}^2$$

è per conseguenza

$$x = -\sqrt[3]{\frac{r}{2}} \pm \sqrt[3]{\frac{-3}{4}} \times \sqrt[3]{r}, \text{ ossia } x = \sqrt[3]{r} \left(\frac{-1}{2} \pm \sqrt[3]{\frac{-3}{4}} \right).$$

Quindi le tre radici cercate dell'equazione $x^3 - r = 0$, saranno

$$x = \sqrt[3]{r}, x = \sqrt[3]{r} \left(\frac{-1}{2} + \sqrt[3]{\frac{-3}{4}} \right), \text{ ed } x = \sqrt[3]{r} \left(\frac{-1}{2} - \sqrt[3]{\frac{-3}{4}} \right).$$

§ 12. Passando al secondo caso supponghiamo, che abbia il coefficiente di x un valore, per cui avrassi $x^3 \pm qx + r = 0$; siano a, b, c , le tre radici delle quantità reali, per cui non esistendo il secondo termine, si avrà $a \pm b \pm c = 0$, in tal caso sarà (§ 5.) $q = \pm ab \pm ac \pm bc$, e considerando il segno superiore $q = ab + ac + bc$; ma per l'equazione $a + b + c = 0$, si avrà $b = -a - c$; dunque sostituendo co-desto valore sarà $q = -a^2 - ac - c^2$, lo stesso risultato verificasi supposte tutte le radici negative, o una o parte di loro.

Dunque se il secondo termine di un'equazione del terzo grado è nullo, e le tre radici saranno reali, il terzo termine avrà sempre il segno negativo.

Se il terzo termine sarà positivo non saranno tutte e tre le radici reali, ed essendo reale l'equazione, saranno due le radici immaginarie.

Per risolvere ora la suddetta equazione facciasi $x = y + z$, in cui una delle radici sarà perciò $y + z$, dunque $x^3 = y^3 + 3yz(y + z) + z^3$, e sostituendo x in vece di $y + z$ avrassi $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$.

Or quest'ultima non essendo che la prima trasformata

con supporre $x=y+z$ potransi tra loro comparare per così determinare y e z , e quindi x , e paragonandole avrassi $q=-3yz$, $-r=y^3+z^3$, perciò $z=\frac{-q}{3y}$, e $z^3=\frac{-q^3}{27y^3}$. Ma

essendo $y^3+z^3=-r$, sarà $y^3+r=-z^3=\frac{q^3}{27y^3}$, perciò

$y^6+ry^3=\frac{q^3}{27}$. Ecco un'equazione di sesto grado de-

derivata (lez. 5^a § 7.), quale, fatto $y^3=m$, trasformerassi in $m^2+rm=\frac{q^3}{27}$, dunque $m=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}\right)}=y^3$

perciò $y=\sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}\right)}\right]}$.

Or dalla equazione $y^3=m$ si ha $y=\sqrt[3]{m}$, e, per la lez. 5^a § prec. $y=\sqrt[3]{m\left(\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}$, e sostituendo in codeste due ultime equazioni il valore di m , si avrà

$$y=\sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}\right)}\right]}$$

$$y=\sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right]}$$

$$y=\sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right]}$$

Dunque si avranno sei valori di y , e, fatti gli stessi calcoli, otterransi altri sei valori di z , cioè

$$z = \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$$

$$z = \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

$$z = \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

Ma per ipotesi si ha $y+z$ radice di x , perchè $x=y+z$, dunque sostituendo avrassi

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$$

$$x = \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

$$+ \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

$$x = \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

$$+ \sqrt[3]{\left[\left[\frac{-r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right] \left[\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right]\right]}$$

E considerando il segno superiore, si avranno le tre radici di x .

Dunque nell'ipotesi del terzo termine q positivo avransi due radici immaginarie, ed una reale; per conseguenza sarà l'equazione risolubile.

La ritrovata formola suol dirsi *formola cardanica*, essendo stato Cardano il primo a pubblicarla con le stampe.

APPLICAZIONE.

Abbiasi l'equazione di terzo grado $x^3 + 6x - 10 = 0$; sarà perciò confrontandola colla suddetta formola cardanica $q = 6$, $r = -10$, perciò fatte le sostituzioni, saranno le tre radici della proposta equazione espresse per

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{5 + \sqrt{(25+8)}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{(25+8)}} = \sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} + \sqrt[3]{(5-\sqrt{33})} \\ x &= \sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} \chi \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{(5-\sqrt{33})} \chi \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \\ x &= \sqrt[3]{(5+\sqrt{33})} \chi \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{(5-\sqrt{33})} \chi \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

§ 15. Consideriamo ora nell'equazione generale il segno inferiore; ed abbiassi $x^3 - qx + r = 0$, allora le tre or dette equazioni ridurransi ad

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} \\ x &= \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} \left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right] \\ &\quad + \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} \left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right] \\ x &= \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} \left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right] \\ &\quad + \sqrt[3]{\left[\frac{-r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right]} \left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right] \end{aligned}$$

Esaminiamo ora codeste equazioni generali da dove dedurrassi il caso *irriducibile*.

In queste ultime equazioni sia primieramente $\frac{r^2}{4} = \frac{q^5}{27}$
allora avrassi

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{-r}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{r}{4} - r\sqrt{\left(\frac{-5}{4} + \frac{r}{4}\right)} + r\frac{\sqrt{-5}}{4}\right]} = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\left[\frac{r}{4} + r\sqrt{\left(\frac{-5}{4} + \frac{r}{4}\right)} - r\frac{\sqrt{-5}}{4}\right]} = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$$

Perciò in tal caso l'equazione avrà tre radici reali, due delle quali saranno eguali, e per conseguenza risolubili.

Sia in secondo luogo $\frac{r^2}{4} > \frac{q^5}{27}$ fatto $\frac{r^2}{4} - \frac{q^5}{27} = M$,
si avranno

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{M}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{M}\right)}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{M}\right)}\left(\frac{-1 + \sqrt{-5}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{M}\right)}\left(\frac{-1 - \sqrt{-5}}{2}\right)$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{M}\right)}\left(\frac{-1 - \sqrt{-5}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{M}\right)}\left(\frac{-1 + \sqrt{-5}}{2}\right)$$

Perciò in tale ipotesi l'equazione avrà due radici immaginarie, ed una rappresentata sotto una formola del tutto reale, e perciò (lez. 5^a § 2.) sarà l'equazione risolubile.

Supposto q negativo, sia in fine $\frac{q^5}{27} > \frac{r^2}{4}$, allora avrassi

$$\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27} = -M, \text{ e perciò}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1 + \sqrt{-5}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1 - \sqrt{-5}}{2}\right)$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1 - \sqrt{-5}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1 + \sqrt{-5}}{2}\right)$$

Si avrebbero dunque tre radici immaginarie in una equazione reale. Esaminiamo in che consiste codesta apparente contraddizione cogli stabiliti principî.

§ 14. Si sa dalla lez. 2^a § 17., che qualunque quantità immaginaria potrà rappresentarsi per $b\sqrt{-1}$, e fatto $\frac{-r}{2} = a$, le superiori radici ridurransi ad

$$(1^a) \quad x = \sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})} = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$(2^a) \quad x = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} (-1 + \sqrt{-5}) + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} (-1 - \sqrt{-5})$$

$$(3^a) \quad x = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} (-1 - \sqrt{-5}) + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} (-1 + \sqrt{-5})$$

Or nel nostro caso essendo $h=1$, $k=5$, si ha (lez. 2^a § 15.)

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{b\sqrt{-1}}{5a^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(b\sqrt{-1})^2}{18a^{\frac{5}{3}}} + \frac{10(b\sqrt{-1})^5}{162a^{\frac{8}{3}}} - \frac{80(b\sqrt{-1})^4}{1944a^{\frac{11}{3}}} \text{ cc.}$$

o sia (lez. 2^a § 21.)

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{b\sqrt{-1}}{3a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2b^2}{18a^{\frac{5}{3}}} - \frac{10b^3\sqrt{-1}}{162a^{\frac{8}{3}}} - \frac{80b^4}{1944a^{\frac{11}{3}}} \text{ ec.}$$

Ma supposto $b\sqrt{-1}$ negativo avrassi

$$(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} - \frac{b\sqrt{-1}}{3a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2b^2}{18a^{\frac{5}{3}}} + \frac{10b^2\sqrt{-1}}{162a^{\frac{8}{3}}} - \frac{80b^4}{1944a^{\frac{11}{3}}} \text{ ec.}$$

Dunque sostituendo codesti valori nell'equazione (1^a) ridurrassi ad

$$x = 2a^{\frac{1}{3}} + \frac{4b^2}{18a^{\frac{5}{3}}} - \frac{160b^4}{1944a^{\frac{11}{3}}} \text{ ec.}$$

serie in cui tutti i termini immaginari sonosi distrutti, e che non resta, che una serie infinita di termini composti di quantità reali; perciò la radice

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)}$$

sarà *reale*, e non è che apparentemente immaginaria.

Moltiplicando poi lo sviluppo trovato di $\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}$ per $(-1+\sqrt{-3})$, e quello di $\sqrt[3]{(a-b\sqrt{-1})}$ per $(-1-\sqrt{-3})$, e sommando codesti prodotti avrassi egualmente una serie infinita di termini composti di quantità reali. Dunque la radice

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)} \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

sarà anche essa *reale*; ed in fine per la ragione istessa sarà reale la radice

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} + \sqrt{-M}\right)\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-r}{2} - \sqrt{-M}\right)\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)}$$

Dunque nell'ipotesi di $\frac{q^3}{27} > \frac{r^2}{4}$, e di q negativo, la *pretesa immaginarietà* delle radici non è che meramente apparente, giacchè tutte e tre le radici saranno reali.

Le dedotte equazioni cardaniche essendo tutte derivate dalla generale equazione di terzo grado $x^3 + qx + r = 0$, dedurrassene, per quanto si è detto, che se sarà $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27} > 0$, si avranno due radici *immaginarie*, ed una *reale*; se sarà $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27} = 0$, avransi tre radici *reali*, due delle quali saranno *eguali*; se finalmente avrassi $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27} < 0$, si avranno tre radici *reali*, e *disuguali*.

Or si è appunto in quest'ultimo caso, che essa equazione si presenta sotto un aspetto immaginario, ed è per questo, che a simil caso dassi il nome di *caso irriducibile*.

Di più avendo fatto noi svanire le quantità immaginarie per mezzo di una serie infinita, ne segue, che il valore delle radici non sarà che approssimante, e per conseguenza in tale stato l'equazione non potrà risolversi, che per approssimazione. Ecco in che consiste realmente l'*irriducibilità*; come il primo fe' osservare il Sig. Nicole, (*Memorie dell'Accad.* 1758.)

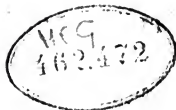
Inoltre avendo noi dimostrato (lez. 5^a § 3.) esser l'ultimo termine di una equazione di grado m esimo il prodotto di m radici, ne segue, che in quella di terzo grado allorchè una delle tre radici reali, ed ineguali, sarà commensurabile, l'equazione suddetta non apparterrà più al caso irriducibile, dappoichè l'uno de' divisori dell'ultimo termine darà la radice commensurabile. Ma se però sarà la radice incommensurabile bisognerà per trovare la espressione reale di essa, o sommare la suddetta serie, o liberare in qualche altra maniera l'espressione trovata dalla forma immaginaria, « ed è ciò (dice Alembert) quello in cui inutilmente si studia da due secoli. »

§ 15. Darem fine a codesta teoria, ed insieme a' nostri elementi con far vedere col Sig. Alembert (*Enciclopedia metodica*) la causa produttrice il caso irriducibile.

Recapitolando quanto da noi si è detto, per risolvere l'equazione di terzo grado $x^3 + qx + r = 0$, abbiamo supposto $x = y + z$, supposizione ammissibile per essere delle quantità indeterminate x, y, z , da codesta ultima ne abbiamo dedotta $x^3 - 3xyz - y^3 - z^3 = 0$.

Siamo poi passati a comparare questa colla data, e ne abbiamo ricavate l'equazioni parziali $q = -3yz$, $-r = y^3 + z^3$. Ecco intanto una supposizione, che non è rigorosamente dimostrata, giacchè dal paragone delle due equazioni altro non potrà dedursi che $qx + r = -3xyz - y^3 - z^3$.

Or questa un pò arbitraria supposizione (benchè non falsa) essendo le quantità componenti indeterminate, fa sì che le due quantità y e z , in luogo di essere reali, come lo dovriano, siano ambedue immaginarie, e che perciò nel caso di q negativo, e di $\frac{q^3}{27} > \frac{r^2}{4}$, ne resulteranno tre radici apparentemente immaginarie, cioè che, come abbiamo osservato, costituisce il caso irriducibile. Dunque l'inconveniente del caso irriducibile nasce dal metodo impiegato fin qui per risolvere le equazioni di terzo grado, metodo imperfetto, ma il solo, che abbiassi potuto trovare fino al presente.



I N D I C E

DEDICA

PREFAZIONE

LEZIONE PRIMA.

	pag.
O PERAZIONI PRELIMINARI DELL'ALGEBRA	3
<i>Della somma delle quantità algebriche intere</i>	7
<i>Della sottrazione di esse</i> - - - - -	10
<i>Della moltiplicazione</i> - - - - -	11
<i>Della divisione</i> - - - - -	16
<i>Delle operazioni preliminari sulle frazioni</i> - -	22
<i>Somma, e sottrazione delle quantità frazionarie</i>	27
<i>Moltiplicazione delle frazioni</i> - - - - -	29
<i>Divisione delle frazioni</i> - - - - -	30
<i>Delle frazioni decimali</i> - - - - -	32
<i>Delle operazioni su i decimali</i> - - - - -	36
<i>Somma e sottrazione</i> - - - - -	ivi
<i>Moltiplicazione de' decimali</i> - - - - -	38
<i>Divisione de' decimali</i> - - - - -	40

LEZIONE SECONDA.

TEORIA DEGLI ESPONENTI, DE' RADICALI E DELLE QUANTITÀ IMMAGINARIE - - -	47
<i>Radici</i> - - - - -	60
<i>Quantità immaginarie</i> - - - - -	83

LEZIONE TERZA.

DELLE EQUAZIONI DI PRIMO E SECONDO GRADO, E DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE DI 1° GRADO	95
<i>Delle equazioni di secondo grado</i> - - - - -	103
<i>Delle equazioni indeterminate</i> - - - - -	115
<i>Delle quantità infinite ed infinitesime</i> - - -	124

LEZIONE QUARTA.

DE' RAPPORTI, DELLE PROPORZIONI E PROGRES- SIONI, E DE' LOGARITMI - - - - -	129
<i>Applicazione delle proporzioni, e progressioni ad alcuni problemi</i> - - - - -	143
<i>De' logaritmi</i> - - - - -	157

LEZIONE QUINTA ED ULTIMA.

TEORIA GENERALE DELLE EQUAZIONI, E DI QUELLE DI TERZO GRADO - - - - -	169
<i>Trasformazione delle equazioni</i> - - - - -	188
<i>Delle equazioni di terzo grado</i> - - - - -	195

TAVOLA

DEGLI ERRORI

DELLE CORREZIONI

<i>pag.</i>	<i>lin.</i>		
11	1	dalla	della
34	18	della	dalla
36	11	decina	decima
	(2)	348, 4523	348, 4523
	3	2, 504	2, 504
37	4	0, - 49	0, 49
	5	$\overline{=951, 2465}$	$\overline{=351, 2465}$
40	6	568, 1	56, 81
43	19	228	2280
ivi	22	228	2280
45	ult.	$\overline{=14285714}$	$\overline{=3, 14285714}$
47	8	così a	così a^2
49	18	§ 9.	§ 1.
51	4	$(a+b)^2$	$(a+b)^n$
63	ult.	$\sqrt[b]{b^m}$	$\sqrt[b]{b^n}$
64	13	$ba\sqrt[3]{(a-b)}$	$6a\sqrt[3]{(a-b)}$
ivi	17	$ba\sqrt[3]{(a-b)}$	$6a\sqrt[3]{(a-b)}$
65	9	$5a\sqrt[3]{a}$	$5a\sqrt[3]{a}$
71	5	§ 1.	§ 13.
86	15	quattro	quantità
107	13	$\frac{\sqrt{729}}{2}$	$\frac{\sqrt{729}}{2}$
ivi	ivi	$161 \pm \frac{\sqrt{729}}{2}$	$\frac{161 \pm \sqrt{729}}{2}$
117	7	m	M
124	16	queste	questa
151	12	ap	np
159	2	$\log. \frac{y}{n}$	$\frac{\log. y}{n}$
164	15	sei	se i
188	13	quella	quelle
189	14	delle proposte	della proposta

